Gk2 i Matematik, hemtal v7/09 Metsalo

Fredagen ~~12~~ 13.2. har vi 1:a datorövningen. Uppgifterna finns på insidan av detta blad. Glöm inte att datorövningarna kräver förberedelser!

Ov: 1a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n})$ divergerar.

b) Dito för $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$.

c) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^3})$ konvergerar och bestäm någon övre gräns för dess summa.

2) 9.3.44. Jämför med motsvarande exempel i kap. 9.3: om vi vill approximera summan hos den överharmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ så att $|\text{felet}| < 0.001$, så ger den primitiva metoden att vi måste addera minst 1000 termer, medan den något bättre metoden ger att det räcker med 22 termer och en korrektionsterm. Här får vi en ännu effektivare metod att approximera talet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3a) 9.5.23 b) 9.5.24 c) 9.5.28 d) 9.5.32

4) Nu behandlar vi Svakars sillfrukost, som delades ut tillsammans med kursinformationen. Avgör vilka av Svakars kamrater dricker ändligt mycket och hur mycket de dricker samt vilka dricker oändligt mycket. Observera också den sammanfattande frågan. Var dock försiktiga med empiriska försök: divergens kan vara fatalt!

a) Adam, Bertil, Caesar och David

b) Erik, Filip, Gustav och Harald

c) Ivar, Johan, Kalle och Ludvig

d) Martin, Olof, Petter och Quintus

Slutligen en sammanfattande fråga: vem dricker mest av dem som dricker ändligt mycket? Glöm därvid inte Niklas!

Demo: 9.7.16&18/9.7.18&20 (uppl. 4&5/uppl. 6). Serier ger oss nya metoder att approximera "omöjliga" integraler. Denna typ av integraler dyker upp i kap. 11 i samband med klotoiden (fig. 11.25/fig. 11.28 i uppl. 4/uppl. 5&6), en viktig kurva vid byggande av (järn-)vägar.

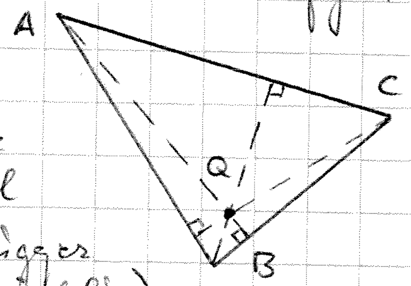
Fredagens hemtal på baksidan.

Fr: 1) Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-0.5}$ med ett rationellt tal så att $|\text{felet}| < 0.0005$. (Använd gärna räknarens värde $e^{-0.5} \approx 0.606\,530\,66$ efteråt för kontroll.)

2) Utveckla funktionen $f(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ i form av en Maclaurinserie och använd de 3 första från 0 skiljda termerna i serien för att approximera $f(2)$. Uppskatta också felet i approximationen.

3a) 10.2.8 (medianernas skärningspunkt, tyngdpunkten)

b) Visa att om vi tar en godtycklig tetraeder och sammanbinder varje hörn med skärningspunkten för motstående sidas medianer så kommer dessa fyra linjer att skära i en punkt.



4) Visa (lämpligast mha. vektorer och skalärprodukten) att även de tre höjderna hos en plan triangel ABC skär i en punkt Q (som ligger utanför triangeln, om den är trubbvinklig).

<u>Kommentar:</u> Hos plana trianglar skär även mittpunktsnormalerna i en punkt (den omskrivna cirkelns mittpunkt) och medianernas, höjdernas och mittpunktsnormalernas skärningspunkter ligger på en rät linje. Vidare skär även bisektriserna i en punkt (den inskrivna cirkelns mittpunkt).

Demo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 22 & -26 \\ 22 & 16 & 4 \\ -26 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ Visa som <u>förberedelse</u> att (den symmetriska) matrisen A har (de reella) egenvärdena $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 36$ och $\lambda_3 = -36$ med tillhörande (ortonormaliserade) egenvektorer $\hat{v}_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2)^T$, $\hat{v}_2 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)^T$ resp. $\hat{v}_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T$.

Under övningen analyserar vi 2:agradsytan
$$x^2 + 16y^2 - 8z^2 + 44xy + 8yz - 52zx - 12x + 240y - 192z = 0$$
och visar att det rör sig om en enmantlad hyperboloid. Sedan kan vi (låta Mathematica) rita den under datorövningen.