Gk2 i Matematik, hemtal v6/09 Mehsalo

Räknestugan äger rum på tisdagar kl. 16-18 på TF i Klubben. Vidare har matematik- och fysikinstitutionen en allmän räknestuga i huvudbyggnaden.

On: 1) Visa att talföljden är monoton och begränsad:

a) $\{\sqrt{n^2+4n} - n\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$

(Utanför hemtalet: monotoniciteten och begränsningen medför att talföljderna är konvergenta. Försök också bestämma respektive gränsvärde.)

2a) 9.2.10 b) 9.2.14

3a) 9.3.4 b) 9.3.14

4a) 9.1.32 (Detta medför att $\lim_{n\to\infty} a_n$ ∃ och är $\leq e$. Sats 6 i kap. 3.4 ger att $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.)

b) 9.3.26

Demo: 9.2.26-31 (Tänk efter före demot också!)

Fr: 1) En dag leker Svakar med en stålkula. Han låter den falla mot ett betonggolv och lyssnar på klickarna från studsarna som kommer allt tätare, eftersom kulan förlorar energi vid varje studs (bl.a. i form av ljud: "Det sa' bara klick!" (citat: HMCG)). Det låter som om kulan studsar oändligt tätt mot slutet, men att den slutar studsa efter en ändlig tid. För att undersöka fenomenet närmare släpper Svakar kulan från olika höjder h över golvet och observerar att kulan studsar upp till höjden p·h, där $p \in]0,1[$ och tycks vara oberoende av h.

a) (gymnasiefysik): Härled formeln för tiden t_0 det tar för kulan att falla till golvet från höjden h_0, om kulans massa är m, gravitationsaccelerationen är g, vi bortser för enkelhets skull från luftmotstånd o.d och antar att kulan är punktformad.

(forts. på baksidan)

1b)(Högskolematematik): Om vi idealiserar och tänker oss att kulan studsar oändligt många gånger mot golvet och att varje studs är momentan, hur lång sträcka kommer kulan totalt att röra sig, innan den stannar om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: rör den sig en ändlig eller en oändlig sträcka totalt?

c)(Dito): Hur lång tid tar det innan kulan stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: tar det en ändligt eller en oändligt lång tid?

2a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n = \left(\frac{1}{1}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ldots = 1+4/9+27/125+\ldots$ konvergerar och alltså har en summa S.

b) Visa att $S \in]1.5, 2.5[$, så $S=2$, korrekt avrundat till närmaste heltal.

3) Bestäm konvergensradien och konvergensintervallet hos resp. potensserie. Glöm inte att undersöka seriens uppförande i ev. ändpunkter hos konv. intervallet.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x+3)^n/\sqrt{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}\cdot(x-1)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{2n}/5^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^{3n}/n^n$

4a) Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n/(2n)! = 1-x/2!+x^2/4!-x^3/6!+\ldots$ konvergerar i hela $\mathbb{R}$.

b) Bestäm någon övre och undre gräns för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n/(2n)! = 1-2/2!+2^2/4!-2^3/6!+\ldots$ Gränserna får vara grova, men skall vara motiverade.

c) Dito för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(-2)^n/(2n)! = 1+2/2!+2^2/4!+\ldots$

Demo: 4.6.11. Mha. detta kan vi approx. talet $\ln y$ för $y>0$ med godtyckligt litet fel med enbart papper och penna, om så behövs!