Gk2 i Matematik, hemtal v5/09 Metsalo

På <u>insidan</u> av detta blad finns de 9 icke-degenererade 2:a-gradsytorna sammanställda. En del av dem finns också i montrarna utanför matematik-biblioteket.

Öv. 1a) 8.1.4 b) 8.1.13 c) 8.1.15 i Adams.

2) Vi studerar en ellips E och en hyperbel H i xy-planet. E:s toppar är H:s brännpunkter och H:s toppar är E:s brännpunkter. E har ekvationen $x^2/5^2+y^2/13^2=1$. Bestäm H:s ekvation samt dess asymptoter på formen $y=ax+b$.

3) Vi studerar kurvan $(x,y)=\left(\frac{t}{4}(t-9)(t-24),\ t(t-24)\right)$.

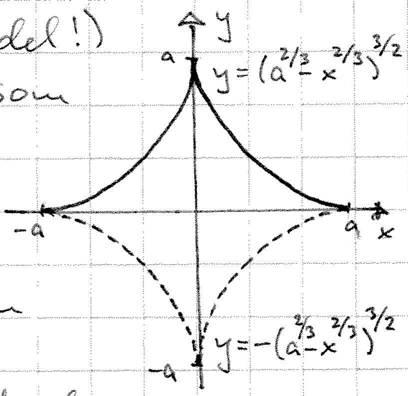
a) Var har kurvan horisontell resp. vertikal tangent?

b) Kurvan skär sig själv i origo. Bestäm lutningen hos tangentlinjerna där.

c) Skissa kurvan och visa, att den bara skär sig själv i origo.

d) Beräkna arean hos öglan, som kurvan bildar. (Använd gärna räknaren som hjälpmedel!)

4) Vi studerar <u>asteroiden</u> $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, som på parameterform kan ges som $(x,y)=(a\cdot\cos^3 t,\ a\cdot\sin^3 t)$.



a) Använd <u>parameterformen</u> för att beräkna båglängden s hos asteroiden samt arean A innanför den. (Om ett plant område har arean A och dess begränsningskurva har båglängden s så är $s^2/A \geq 4\pi$ med likhet endast för en cirkelskiva.)

b) Låt asteroiden rotera kring x-axeln och beräkna volymen V innanför den rotationssymm. ytan, som enligt ex. 8.4.2 har arean $\frac{12}{5}\pi a^2$. (Om en kropp har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så är $A^3/V^2 \geq 36\pi$ med likhet endast för ett klot.)

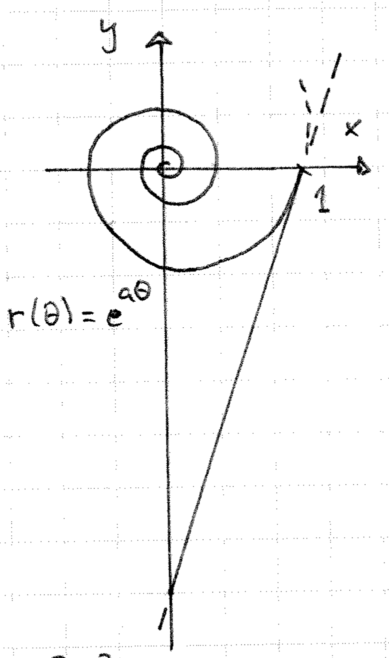
<u>Kontroll</u> (efteråt!): använd $y=\pm(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ och Gk1-kunskaper.

<u>Anmärkning:</u> högskolematematik handlar inte om att slå upp färdiga formler i läroböcker och formelsamlingar!

Demo: Vi analyserar kägelsnittet $4x^2-4xy+7y^2-24y=0$

Fredagens hemtal på baksidan

Fr. 1) Kurvan $r(\theta) = e^{a\theta}$ kallas för en <u>logaritmisk spiral</u> (i spiralen i figuren är $a > 0$). Linjen i figuren är spiralens tangentlinje i punkten $(r, \theta) = (1, 0)$ ($\Rightarrow (x, y) = (1, 0)$). Visa att den heldragna delen av spiralen (motsvarande $\theta \leq 0$) har samma längd som den heldragna delen av tangentlinjen, som finns mellan koordinataxlarna.



2) Vi studerar kurvan $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$.

a) Skriv om ekvationen mha. polära koordinater samt skissa kurvan.

b) Visa att kurvan ryms i en kvadrat med sidan 4.

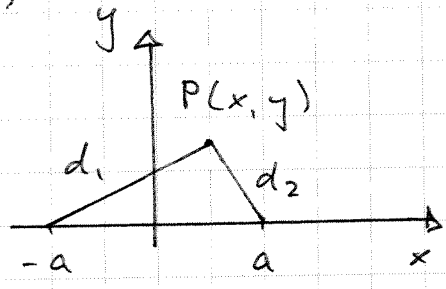
c) Beräkna arean hos området innanför kurvan.

3) Skissa <u>limaçonen</u> $r = 2 - 4\sin\theta$ och beräkna arean hos området, som finns innanför stora öglan men utanför lilla öglan hos limaçonen.

4a) Beräkna arean hos ytan som uppstår då kardioiden $r = a(1+\cos\theta)$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan. (Se anmärkningen vid onsdagens uppg. 4. Även här måste man först sätta upp integralen. Utnyttja också kontrollen $A^3/V^2 \geq 36\pi$, som ges (utan bevis) i b)-delen.)

Demo: För punkten $P(x, y)$ låter vi d_1 beteckna avståndet från P till punkten $(-a, 0)$ och d_2 avståndet från P till punkten $(a, 0)$.



Vi studerar <u>lemniskatan</u> $C: d_1 \cdot d_2 = a^2$ och beräknar arean innanför C samt arean hos ytan som uppstår, då C roterar kring y-axeln.