

I systemet till höger har vi två massor m_1 och m_2 upphängda i två fjädrar med fjäderkonstanterna k_1 och k_2 . Nedan härleder vi de rörelseekvationerna för detta system ett system av två kopplade 2:a ordningens linjära DE, som kan lösas analytiskt eller numeriskt. Vi bortser för enkelhets skull från eventuell dämpning i systemet

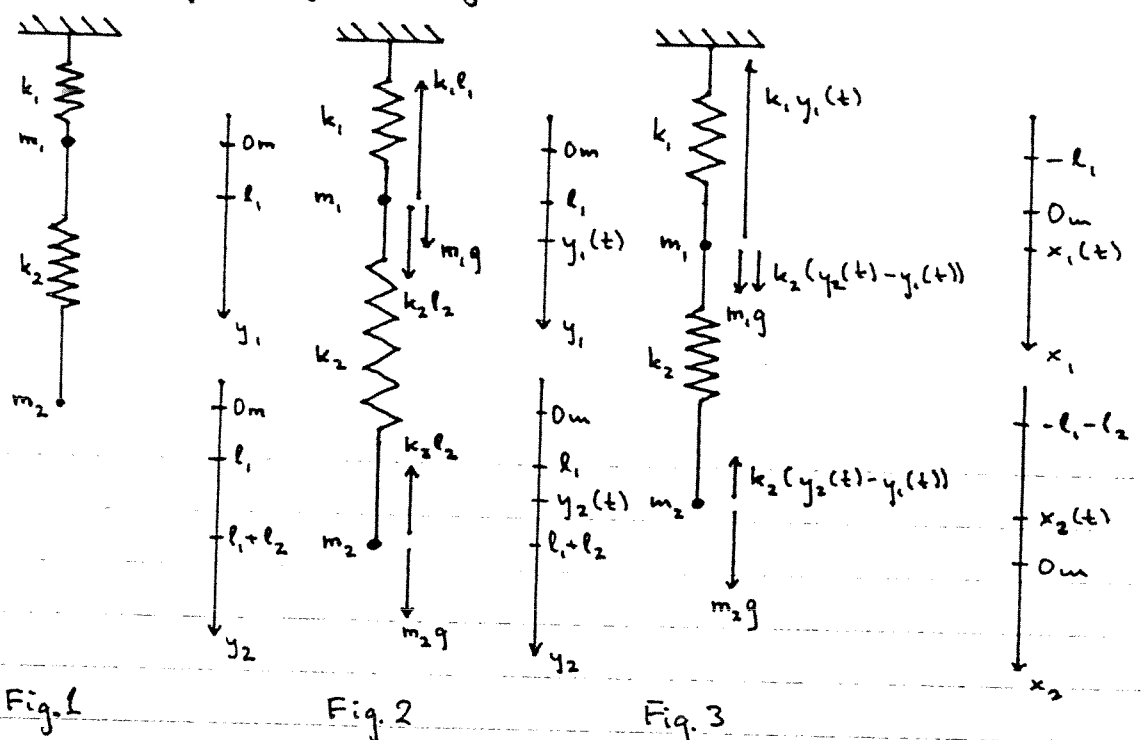
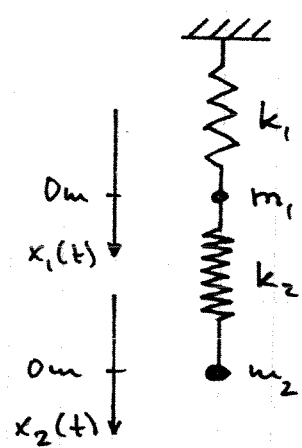


Fig. 1: Jämvikt utan gravitation (fjädrarnas vilolägen)
 Fig. 2: Jämvikt med gravitation. $m_1 g = k_1 l_1 - k_2 l_2$,
 $m_2 g = k_2 l_2 \Rightarrow (m_1 + m_2) g = k_1 l_1$

Fig. 3: Rörelse. $\Sigma F_1 = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) + m_1 g = m_1 \cdot y_1''(t)$
 $\Sigma F_2 = -k_2 (y_2 - y_1) + m_2 g = m_2 \cdot y_2''(t)$

$$\begin{cases} y_1'' + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot y_1 - \frac{k_2}{m_1} \cdot y_2 = g \\ y_2'' - \frac{k_2}{m_2} \cdot y_1 + \frac{k_2}{m_2} \cdot y_2 = g \end{cases}$$

Inför: $x_1(t) = y_1(t) - l_1 \Rightarrow x_1' = y_1', x_1'' = y_1''$
 $x_2(t) = y_2(t) - l_1 - l_2 \Rightarrow x_2' = y_2', x_2'' = y_2''$

$$\begin{cases} x_1'' + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot (x_1 + l_1) - \frac{k_2}{m_1} \cdot (x_2 + l_1 + l_2) = g \\ x_2'' - \frac{k_2}{m_2} \cdot (x_1 + l_1) + \frac{k_2}{m_2} \cdot (x_2 + l_1 + l_2) = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1''(t) + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_1} \cdot x_2(t) = 0 \text{ m/s}^2 \\ x_2''(t) - \frac{k_2}{m_2} \cdot x_1(t) + \frac{k_2}{m_2} \cdot x_2(t) = 0 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Analytisk lösning:

$$\begin{cases} x_1''(t) + \frac{k_1+k_2}{m_1} \cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_1} \cdot x_2(t) = 0 \text{ m/s}^2 & (1) \\ x_2''(t) - \frac{k_2}{m_2} \cdot x_1(t) + \frac{k_2}{m_2} \cdot x_2(t) = 0 \text{ m/s}^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_2(t) = \frac{m_1}{k_2} \cdot x_1''(t) - \frac{k_1+k_2}{k_2} \cdot x_1(t)$$

$$(2) \Rightarrow x_2''(t) = \frac{k_2}{m_2} \cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_2} \cdot \left(\frac{m_1}{k_2} \cdot x_1''(t) + \frac{k_1+k_2}{k_2} \cdot x_1(t) \right) =$$

$$= -\frac{m_1}{m_2} \cdot x_1''(t) - \frac{k_1}{m_2} \cdot x_1(t)$$

$$\begin{aligned} (1)'' \Rightarrow x_1^{(4)} + \frac{k_1+k_2}{m_1} \cdot x_1'' - \frac{k_2}{m_1} \cdot \left(-\frac{m_1}{m_2} \cdot x_1'' - \frac{k_1}{m_2} \cdot x_1 \right) &= \\ \Rightarrow x_1^{(4)} + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \cdot x_1'' + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \cdot x_1 &= 0 \text{ (m/s}^4) \end{aligned}$$

Via elimination får vi en 4:e ordn. linjär homogen DE med konstanta koefficienter.

Ausatsen $x_1(t) = e^{rt}$ ger kar. polynom

$$r^4 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \cdot r^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0. \text{ Om vi sätter } s = r^2 \in \mathbb{C} \text{ kan vi lösa 2:a-gradslev. och får}$$

$$s = r^2 = -\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}$$

Det vi har under kvadratroten blir alltid > 0 , så bägge s blir reella och < 0 och alla fyra r -värdena blir rent imaginära: $r_{1,2} = \pm i\omega_1$, $r_{3,4} = \pm i\omega_2$.

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}} \text{ och}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}} \text{ från } r^2 \text{ ovan.}$$

Vi får en kombination av två sinus-svängningar:

$$x_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t.$$

$$x_2(t) \text{ fås sedan ur } x_2 = \frac{m_1}{k_2} \cdot x_1'' + \frac{k_1+k_2}{k_2} \cdot x_1.$$

Koefficienterna A, B, C och D kan slutligen bestämmas mha. begynnelsevillkor.

Numerisk lösning (mha Eulers metod):

Inför $u(t) = x_1(t)$, $v(t) = x_2(t)$, $w(t) = x_1'(t)$, $z(t) = x_2'(t)$

och den 4-kolumnvektorvärda funktionen

$$Y(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))^T.$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = A \cdot Y(t)$$

Om vi har begynnelsevärdena $u_0 = x_1(t_0)$, $v_0 = x_2(t_0)$, $w_0 = x_1'(t_0)$ och $z_0 = x_2'(t_0)$ får vi

$$\text{mha Eulers metod } t_{k+1} = t_k + \Delta t, u_{k+1} = u_k + \Delta t w_k,$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \cdot z_k, w_{k+1} = w_k + \Delta t \cdot \left(-\frac{k_1+k_2}{m_1} \cdot u_k + \frac{k_2}{m_1} \cdot v_k \right)$$

$$\text{och } z_{k+1} = z_k + \Delta t \cdot \left(\frac{k_2}{m_2} \cdot u_k + \frac{k_2}{m_2} \cdot v_k \right).$$