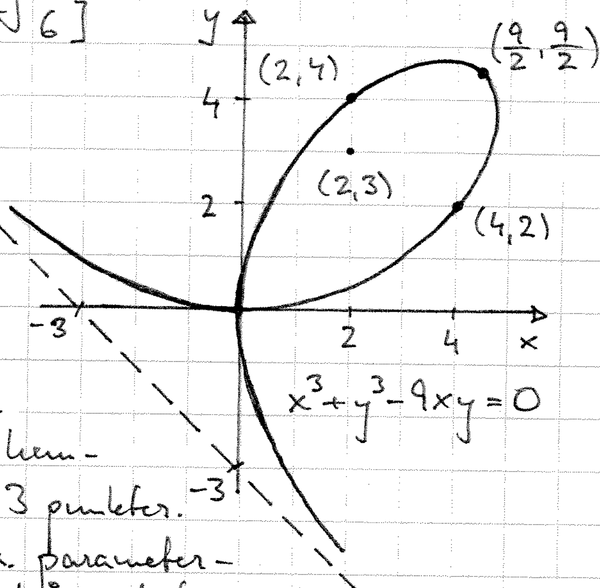
Gk2 i Matematik, datorövning 3, 24.4.2009 Metsalo

Uppgifterna kräver <u>förberedelser</u> hemma! Vi börjar med <u>Matlab</u> och fortsätter sedan med <u>Mathematica</u>. Logga in direkt vid arbetsstationen, vid vilken ni sitter. Därefter startar ni Matlab genom att skriva matlab ↵ Matlab ritar upp nya fönster och svarar med >> när den är beredd att ta emot kommandon. Skriv format long för att få fler decimaler i de kommande räkningarna. En matris $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ matas in som A = [1 2 3 ; 4 5 6]



1) Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$ är bekant från bl.a. datorövningarna. Hos själva öglan är origo längst bort från punkten (2,3), men avståndet till (2,3) antar också ett lok.max och ett lok. och ett glob.min på öglan. Använd <u>Newtons metod</u> (hemtalslappen √(2)) för att approx. dessa 3 punkter. <u>Efteråt</u> kan svaren kontrolleras mha. parameterframställningen av Cartesii blad från datorövning 2.

<u>Varning:</u> ^ (upphöjt till) kräver dubbelklickande, men tycks strejka ibland. 2*2*2 och power(2,3) gör dock samma som 2^3.

<u>Gott råd:</u> Avståndet till punkten (2,3) maximeras/minimeras, då avståndets <u>kvadrat</u> maximeras/minimeras.

Arbeta lämpligast med en 3-kolumnvektor x, vars komponenter är punktens x-koordinat, punktens y-koordinat samt Lagrange-multiplikatorn λ. Elementen i vektorn x anropas som x(1), x(2) resp. x(3). Lämpliga begynnelsevärden för x och y (dvs. x(1) och x(2)) fås ur figuren ovan, lämpliga begynnelsevärden för λ (dvs. x(3)) kan fås ur endera av ekvationerna

$\partial L/\partial x = 0$ (dvs. $\partial f/\partial x + \lambda\cdot\partial g/\partial x = 0$) och

$\partial L/\partial y = 0$ (dvs. $\partial f/\partial y + \lambda\cdot\partial g/\partial y = 0$).

Alternativt kan man dra till med något λ-värde och hoppas på att iterationen ändå konvergerar (går det, så går det!)

v.g. vänd

2) Matlab kan rita grafen av funktioner av två variabler. Vi ritar $z=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$ från fr v12:

```
t=-2:0.02:2; [x,y]=meshgrid(t,t);
```

bildar först en 201-vektor $t=(-2.00, -1.98, -1.96, \ldots, 1.98, 2.00)$ och därefter två 201×201-matriser x och y, som innehåller x- resp. y-koordinaterna för hörnpunkterna i rutnätet som delar upp kvadraten $-2 \le x, y \le 2$ i mindre kvadrater med sidlängden 0.02. (Semikolon ; efter kommandot gör att resultatet inte skrivs ut.)

```
z=(x.*x-1).*(x.*x-1)-(y.*y-1).*(y.*y-1);
```

ger z-koordinaterna för dessa hörnpunkter i en 201×201-matris z. (Punkt . framför multiplikationen gör att multiplikationen sker komponentvis. x*x skulle multiplicera 201×201-matrisen x med sig själv. Subtraktion sker dock automatiskt komponentvis för matriser.)

mesh(x,y,z) ritar ut grafen $z=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$.

contour(x,y,z,-3:0.5:3) ritar ut nivåkurvor för $f(x,y)=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$, närmare bestämt de nivåkurvor som svarar mot $f=-3, -2.5, -2, \ldots, 2.5, 3$. (Det kan hända att figuren är gömd bakom Matlab-fönstret. Den blir dock synlig om vi klickar på dess kant, eventuellt efter att vi flyttat på Matlab-fönstret.)

Lämna Matlab mha. quit och starta Mathematica.

3) Använd NIntegrate för att approximera längden och tyngdpunkten hos Vivianis kurva från ov v8 och datorövn. 2 (sätt $a=1$). Av symmetriskäl finns tyngdpunkten naturligtvis på y-axeln.

4) Mathematica kan även beräkna multipla integraler. Använd Integrate för att beräkna volymen hos miljonärens bassäng från fr v12.

5) Mathematica kan skissa ytor på parameterform mha. ParametricPlot3D (jmf. med datorövn. 2).

a) Skissa Möbius-bandet $F(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = ((1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\cos v, (1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\sin v, u\cdot\sin\frac{v}{2})$ för $u\in[-1/4, 1/4]$, $v\in[-\pi,\pi]$.

forts.

5b) Skissa ytan $\bar{r}(u,v) = (\tan v - u\cdot\sin v,\ -u,\ 1 - u\cdot\cos v)$ för $u \in [-2, 4]$, $v \in [-1.4, 1.4]$. Sätt PlotRange -> All inuti ParametricPlot3D-kommandot, så inte Mathematica kapar av en del av ytan.

c) Approximera arean hos ytan i b)-delen mha. NIntegrate

d) Skissa helicoiden (spiralrampen) $\bar{r}(u,v) = (u\cdot\cos v, u\cdot\sin v, 8v)$, $u \in [6, 15]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$. Vrid sedan figuren genom att klicka på den med musen.

Därefter går vi över till skalär- och vektorfälten i kap. 15 och nabla-räkning med grad, div och rot i kap. 16 i Adams.

6a) Skissa åter grafen av $f(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$, denna gång mha. Plot3D (dubbelklicka för att få ^). Skissa f:s nivåkurvor mha. ContourPlot. $-2 \le x, y \le 2$ är fortfarande ett lämpligt område.

b) Skissa vektorfältet $\bar{u}(x,y) = \text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\hat{j} = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ mha. VectorPlot. (D ger även partiella derivator!) Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan f och ∇f: ∇f pekar åt det håll varåt f ökar snabbast och dess längd ger f:s ökningshastighet i den riktningen. (Om vektorerna i vektorfältet är för små, ta då ett något mindre område, t.ex. $-1.2 \le x, y \le 1.2$.)

c) Skissa skalärfältet $g(x,y) = \text{div}(\bar{u}) = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$, där $\bar{u}$ är vektorfältet från b)-delen mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $\bar{u}$ och $\nabla\bullet\bar{u}$: $\nabla\bullet\bar{u}$ är positivt där $\bar{u}$ lokalt sprider sig och negativt, där $\bar{u}$ lokalt drar sig samman.

7) Sätt nu $f(x,y) = \sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)\cdot((x-1)^2+y^2)}$ och skissa det plana vektorfältet (i $\mathbb{R}^3$) $\bar{v}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}\ (+0\hat{k}) = (-2xy/f(x,y))\hat{i} + ((x^2-y^2-1)/f(x,y))\hat{j}$. Beräkna vektorfältet $\bar{w}(x,y,z) = \text{rot}(\bar{v}) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\hat{k} = h(x,y)\hat{k}$. Skissa skalärfältet $h(x,y)$ mha. ContourPlot. (gör Contours -> 16 inuti ContourPlot-kommandot för att få en bättre figur) och sammanför nivåkurvorna för h och vektorfältet $\bar{v}$ mha Show för att studera sambandet mellan $\bar{v}$ och $\nabla\times\bar{v}$.

v.g. vänd

Mathematica kan lösa en del differentialekvationer analytiskt mha. DSolve och andra numeriskt mha. NDSolve. Friska upp minnet om de analytiska metoderna från Gk1 (kap. 7.9 och 3.7). En del numeriska metoder beskrivs i kap. 17 i uppl. 4 & 6 resp. appendix IV i uppl. 5 av Adams.

8a) Lös den separabla diff.ekvationen $y' = 2x^2y^2$ mha.
DSolve[y'[x]==2*x^2*(y[x])^2, y[x], x].

b) Bestäm allmänna lösningen till den linjära 1:a ordningens diff.ekvationen $y' = y + \cos x - \sin x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelsevillkoret (BV) $y(0)=0$. Jämför lösningarna med lite olika BV $y(0)$.
Plot[Evaluate[y[x]/.%], {x, xmin, xmax}] med lämpliga värden på xmin och xmax insatta direkt efter DSolve-kommandot ritar lösningskurvan.

9) Approximera några lösningskurvor till $y' = x^2 + y^2 - 1$ mha. NDSolve. Använd t.ex. BV $y(0)=1$, $y(0)=0$ och $y(-1)=0$ och rita lösningskurvorna som i uppg. 8b) ovan.

Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret och anropa Firefox genom att skriva firefox ←

10) Anropa (det gamla) programpaketet matta2 genom att skriva http://matta.hut.fi/matta2/ och välj sedan DEW1 från Materiaalit. DEW1 är ett paket för numerisk (approximativ) lösning av 1:a ordningens diff.ekvationer. Skriv in diff.ekvationen i motsv. ruta (välj t.ex. de tre diff.ekvationerna från uppg. 8 och 9 ovan). Observera att hm heter den oberoende variabeln t, inte x.
DEW1 ritar ett fält av <u>tangentlinjesegment</u> till lösningskurvorna och om ni väljer en punkt genom att klicka med musen eller genom att mata in punktens koordinater manuellt, ritar DEW1 en approximation av lösningskurvan genom den punkten.

Lämna Firefox och glöm inte att logga ut.