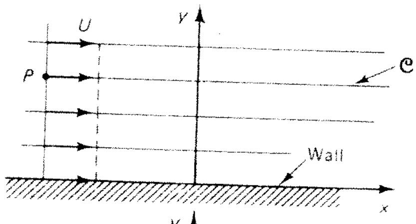
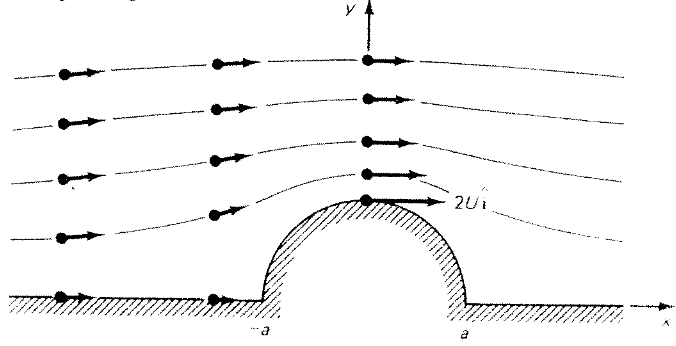
Gk2 i Matematik, hemtal v17/08 Metsalo

Räkneövningen fr v16 (18.4.) är <u>inställd</u>. De hemtal, som tidigare delades ut inför fredagen, är i stället till on v17 (23.4.). Vidare är också föreläsningen <u>inställd</u> på Valborgsmässoaftonen (on 30.4.), eftersom pluxarna har annan verksamhet då. <u>Övningstiden on 30.4.</u> kommer dock att <u>utnyttjas</u>, så alla de teknologer, som vill få Gk2 avklarad i lugn och ro kan ställa frågor. Kursens sista räkneövning äger rum fr 2.5. och sista föreläsningen (som i första hand används åt att repetera kursen och besvara frågor) ti 6.5.

On: Uppgifterna som delades ut till fr v16.





Fr: 1) Om vi har en inkompressibel vätska, som strömmar i övre halvplanet $y>0$, kan dess hastighetsfält ges av $\bar{v}(x,y) = U\hat{i}$ som i den övre figuren till höger. Om vi lägger en halvcirkulär vall i vätskans väg, som i den undre figuren (figurerna stulna ur M.D. Greenberg: Advanced Engineering Mathematics), får vi hastighetsfältet $\bar{v}(x,y) = U\cdot\left(\hat{i} + \frac{a^2}{(x^2+y^2)^2}\left((y^2-x^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}\right)\right)$ för $x^2+y^2>a^2$, $y>0$.

a) Visa att $\bar{v}$ är parallell med vallen (dvs. ortogonal mot vallens normal) längs vallen och att $\bar{v} = \bar{0}$ endast i de två hörnen $(\pm a, 0)$.

b) Visa att $\bar{v}$ är källfritt, dvs. att $\operatorname{div}(\bar{v}) = \nabla\bullet\bar{v} \equiv 0$.

2a) 16.4.20 b) 16.4.21

3) Ett vektorfält $\bar{F} = F_1(x,y,z)\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + F_3(x,y,z)\hat{k}$ av klass C^1 kallas <u>källfritt</u>, om $\operatorname{div}(\bar{F}) = \nabla\bullet\bar{F} \equiv 0$ och <u>virvelfritt</u>, om $\operatorname{rot}(\bar{F}) = \operatorname{curl}(\bar{F}) = \nabla\times F \equiv \bar{0}$.

forts. på baksidan

3a) Bestäm parametrarna α, β och γ så att vektorfältet $\bar{F} = (2x + z + e^y \sin(\alpha x))\hat{i} + (3y - e^y \cos(\alpha x))\hat{j} + (x + \beta y + \gamma z)\hat{k}$ är såväl källfritt som virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.

b) Virvelfriheten i $\mathbb{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) skalär potential $\Phi \ni \bar{F} = \text{grad}(\Phi) = \nabla\Phi$. Bestäm en sådan skalär potential Φ.

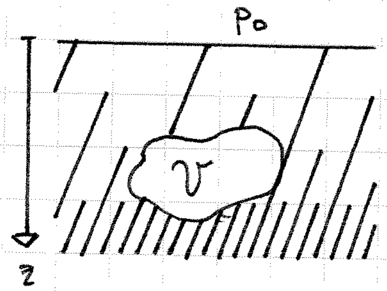
c) Källfriheten i $\mathbb{R}^3$, som saknar hålrum, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) vektorpotential $\bar{G} \ni \bar{F} = \text{rot}(\bar{G}) = \text{curl}(\bar{G}) = \nabla \times \bar{G}$. Använd metoderna i ex 1, kap. 16.2 för att bestämma en sådan vektorpotential. (Här har vi mer valmöjlighet än i b)-delen: vi kan ostraffat välja $\hat{i}$-, $\hat{j}$- eller $\hat{k}$-komponenten i $\bar{G}$ till att vara $\equiv 0$. I exemplet valdes $\hat{j}$-komponenten $\equiv 0$.)

4) Beräkna flödet $\oiint_S (\bar{F} \bullet \hat{N})\,dS$ av vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = \hat{i} + y\hat{j} + z^2\hat{k}$ ut genom sfären $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

a) direkt som en ytintegral

b) genom att omvandla den till en rymdintegral mha. Gauss' sats (divergenssatsen).

Demo: I en vätska med den variabla densiteten $\delta(z)$ (som förmodligen ökar med djupet z) ges trycket på djupet z av $p(z) = p_0 + \int_0^z g \cdot \delta(\zeta)\,d\zeta$, där p_0 är lufttrycket vid ytan och g är tyngkraftsaccelerationen.



Om en kropp $\mathcal{V}$ nedsänkes i vätskan, kommer vätsketrycket att påverka kroppen med en kraft. Med hjälp av Gauss' universalsats (vektorversionen av divergenssatsen) härleder vi

<u>Archimedes' princip:</u> Lyftkraften, varmed en vätska påverkar en i den nedsänkt kropp är lika med den undanträngda vätskans tyngd.

I kap. 16.6 och bland övningsuppgifterna visas det hur flera lagar inom bl.a. fysiken följer ur diverse matematiska satser, främst integralsatserna. Där skördas på sätt och vis frukterna av vårens arbete.
Studera kapitlet <u>ingående</u>.