Gk2 i Matematik, hemtal v15/08 Mehsalo

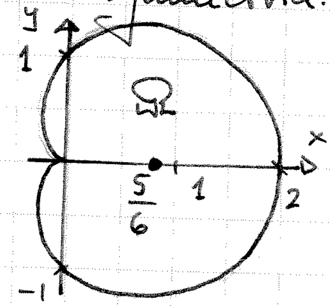
Ov: 1) Vi studerar ytorna i CxS, kap. 14.4 (figuren har bara en fjärdedel av ytorna). Deras skärningskurva är Vivianis kurva, bekant sedan tidigare.

a) Beräkna arean hos den delen av den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$, som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$. Gott råd: använd rektangulära koordinater.

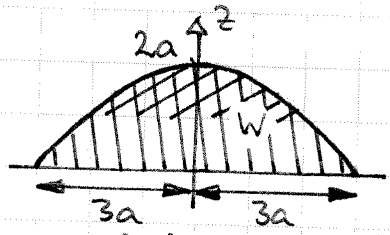
b) Beräkna arean hos den delen av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, som ligger innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$ (ytan kallas för Vivianis fönster). Gott råd: använd polära koordinater och demo om v9.

2) Bestäm tyngdpunkten hos det plana området D med den variabla area-densiteten i uppg. 1, ov v14. Obs: symmetrin.

3) Det plana området Ω till höger är homogent (konstant area-densitet) och begränsas av kardioiden $r = 1+\cos\theta$. Visa att dess tyngdpunkt är $(\frac{5}{6}, 0)$. Gott råd: använd polära koordinater.

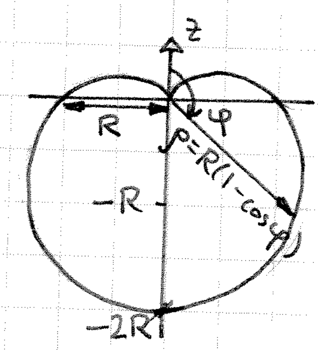


4) Kroppen W begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z = 2a\cdot(1-(x^2+y^2)/(3a)^2)$. I punkten $(x,y,z)\in W$ är dess densitet $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot z/2a$. Dess tyngdpunkt finns då av symmetriskäl på z-axeln. Visa att tyngdpunkten är $\bar{z}=a$. Gott råd: använd cylindriska koordinater.



Demo: Vi visar mha. trippelintegraler att om vi har ett rutat golv, där kvadraterna har sidan a och tappar tandpetare med längden a på golvet, så är sannolikheten att tandpetaren skär minst en skarv (horisontell eller vertikal) $P = 3/\pi$.

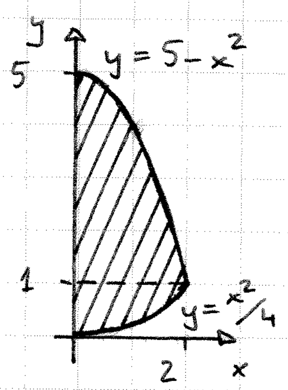
Fr: 1) Beräkna massan hos den äppelformade kroppen, som begränsas av rotationskardioiden $\rho = R(1-\cos\varphi)$, uttryckt i sfäriska koordinater, om den på avståndet ρ från origo har densiteten $\delta(\rho,\varphi,\theta) = \delta_0\,\rho/R$.



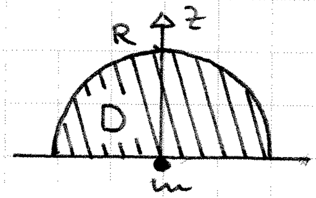
v.g. vänd

2a) Bestäm krökningsradien hos parabeln $y = x^2/4$ i origo (se kap. 11.5).

b) Det skuggade området till höger roterar kring y-axeln, varvid en rotationssymmetrisk kropp med volymen $V = 10\pi$ uppstår. Bestäm dess tyngdpunkt. Gott råd: polära/cylindriska koord.

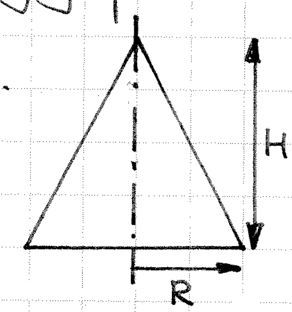


3a) Bestäm tyngdpunkten hos det homogena halvklotet D i figuren till höger med densiteten δ_0 och radien R.



b) Beräkna gravitationskraften varmed halvklotet påverkar en punktmassa m i klotets mittpunkt (se fig.), analogt med demo fr v14. Observera att vi inte skulle få samma kraft, om vi skulle koncentrera hela halvklotets massa till dess tyngdpunkt.

4) Vi har en homogen rät cirkulär kon med höjden H, radien R och densiteten δ_0. Bestäm dess tröghetsmoment med avseende på symmetriaxeln.



Demo: En partikel med massan m [kg], som rör sig med farten v [m/s] har som bekant kinetiska energin $E = mv^2/2$. En partikel med massan m som befinner sig på avståndet r [m] från en axel och roterar kring axeln med vinkelhastigheten ω [1/s], har farten $r\omega$ och följaktligen kinetiska energin $E = m(r\omega)^2/2$.
Vi visar att ett homogent klot med radien R [m] och densiteten δ [kg/m^3] som roterar kring en diameter med vinkelhastigheten ω har totala kinetiska energin $E = 4\pi\delta R^5\omega^2/15$.