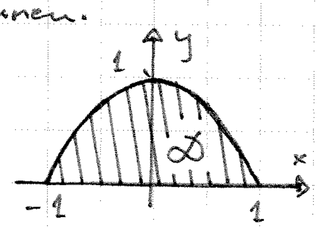
Gk2 i Matematik, hemtal v14/08 Metsalo

På insidan finns en del <u>integralsatser</u> från kap. 16 och 1:a bladet i Adams. Vi behandlar dessa mot slutet av terminen.



Ov: 1a) Det plana området $\mathcal{D}$ begränsas av x-axeln och parabeln $y=1-x^2$ och har i punkten (x,y) area-densiteten $\delta(x,y)=x^4+y$. I vilken punkt/vilka punkter är δ högst?

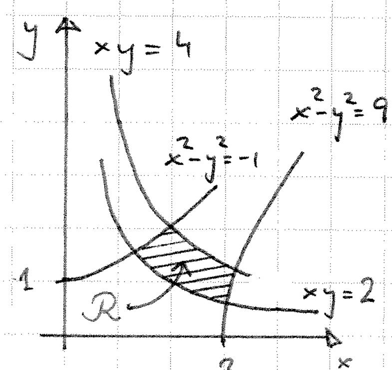
b) Beräkna $\mathcal{D}$:s area, massa och medeldensitet.

2) Beräkna dubbelintegralen $I=\int_0^8\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2\sqrt{16-y^4}\,dy\right)dx$ genom att byta integrationsordning.

3) Beräkna volymen hos kroppen som begränsas av planen $y=0$ och $y=x$ samt den paraboliska cylindern $x+z^2=2$.

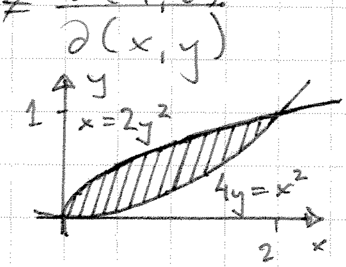
4) Beräkna volymen hos kroppen, som finns innanför de tre räta cirkulära cylindrarna $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ och $z^2+x^2=a^2$. Observera, att kroppen <u>inte</u> är ett klot. Goda råd: utnyttja symmetrin och damma av integrationsteckniken från Gk1.

Demo: Vi beräknar exakta värdet hos $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ mha. dubbelintegraler. (Integralkriteriet i kap. 9.3 gav att serien konvergerar och även ett intervall för dess summa.)



Fr: 1) Hyperblerna $x^2-y^2=9$, $x^2-y^2=-1$, $xy=2$ och $xy=4$ begränsar ett område $\mathcal{R}$ i 1:a kvadranten $(x,y>0)$, skuggat i figuren. Beräkna $\iint_{\mathcal{R}}(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)\,dxdy$ mha. variabelsubstitutionen $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Utnyttja att Jacobian-matrisen $\begin{pmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{pmatrix}$ är <u>inversmatrisen</u> till Jacobian-matrisen $\begin{pmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{pmatrix}$ (jmf. med demo fr v9), vilket medför att Jacobianen (Jacobian-matrisens determinant) satisfierar

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1},\ \text{då}\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0\neq\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$



2) Beräkna volymen och massan hos kroppen, vars projektion på xy-planet är det skuggade området till höger, som begränsas uppitll av planet $z=2$ och nedtill av den paraboliska cylindern $z=y^2$ och som i punkten (x,y,z) har densiteten $\delta(x,y,z)=2x$.

Forts. på baksidan

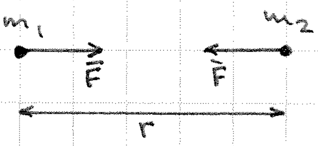
3a) Beräkna trippelintegralen $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{2} \left(\int_{2y}^{4} x\,dz \right) dy \right) dx$.

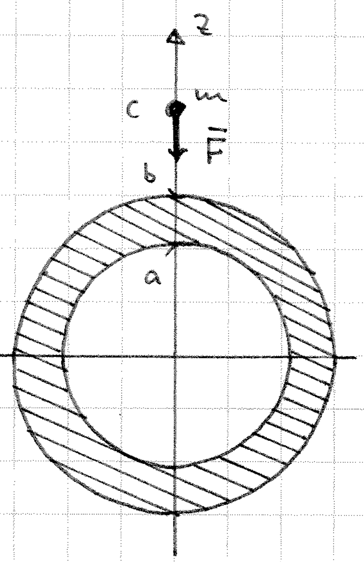
b) Ändra integrationsordningen till $\int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? x\,dy \right) dx \right) dz$ resp. $\int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? x\,dx \right) dz \right) dy$. Bestäm de nya integrationsgränserna och kontrollera genom att beräkna de nya integralerna.

4) Klotet $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ har mittpunkten i origo och radien R (enh. m). I punkten $(x,y,z)\in B$ är dess densitet $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot(x^2+y^2+z^2)/R^2$, så dess densitet är $0\ \mathrm{kg/m^3}$ i mittpunkten och δ_0 (enh. $\mathrm{kg/m^3}$) i periferin. Bestäm klotets massa med hjälp av

a) sfäriska koordinater

b) cylindriska koordinater.





Demo: Newtons gravitationslag ger att två punktmassor m_1 och m_2 på avståndet r från varandra attraherar varandra med en kraft $\bar{F}$, riktad som i den övre figuren och $|\bar{F}| = G\cdot m_1 m_2/r^2$, där G är den universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams; $G \approx 6.670\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$).

Utgående från detta bestämmer vi gravitationskraften, med vilken ett homogent sfäriskt skal påverkar en punktmassa m utanför (eller inuti) detta skal, analogt med exemplet med gravitationskraften från en cirkulär skiva i kap. 14.7. Utan extra arbete får vi även kraften, om m befinner sig i själva skalet (i motsats till att den befinner sig i hålrummet).

Integralsatserna i kap. 16.3–5 och på första uppslaget, något omformulerade (märk att satserna gäller under förutsättningen att diverse krav är uppfyllda):

1) $H'(t) = h(t) \Rightarrow {}_{t_0}\int^{t_1} h(t) = H(t_1) - H(t_0)$.
$${}_{t_0}\int^{t_1} H'(t)\,dt = H(t_1) - H(t_0) \qquad \underline{\text{IKFS}}$$

2) $\nabla\Phi = \bar{F} \Rightarrow \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$,
om kurvan C går från punkten P_0 till P_1.
$$\int_C (\nabla\Phi) \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$$

3) $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (P\,dx + Q\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$
$\iint_R (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{k}\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

4) $\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (-Q\,dx + P\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$
$\iint_R (\nabla \bullet \bar{F})\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet \hat{N}\,ds$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

Greens satser i planet är i grund och botten en och samma sats men i rummet generaliseras de till två helt olika satser:

5) $\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{N}\,dS = \oint_{\partial S} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ Stokes' sats i $\mathbb{R}^3$

6) $\iiint_D (\nabla \bullet \bar{F})\,dV = \oiint_{\partial D} \bar{F} \bullet \hat{N}\,dS$ Gauss' sats i $\mathbb{R}^3$

7) Stokes' universalsats: $\oint_{\partial S} d\bar{r}(\ldots) = \iint_S (\hat{N}\,dS \times \nabla)(\ldots)$,
där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

8) Gauss' universalsats: $\oiint_{\partial D} \hat{N}\,dS(\ldots) = \iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots)$,
där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

Och slutligen lite topologi:
Finn felet i bildsekvensen nedan