Gk2 i Matematik, hemtal v12–13 — Metsalo

På Aprildagen tisdagen 1.4. har vi 2:a mellanförhöret, som omfattar kap. 12–13 i Adams med undantag för kap. 13.7 i uppl. 5&6 (som saknar motsvarighet i uppl. 4). Samma regler gäller som för 1:a mellanförhöret. Tänk på att det kan vara svårt att läsa på inför ett mellanförhör och fira årsfest samma helg. Men man kan läsa på långt före sista helgen också!
Efter kap. 13 fortsätter vi med kap. 14–16.

On: 1) $F(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$.

v12 a) Var är $F = 0$? Bestäm F:s tecken, där $F \neq 0$.

b) Bestäm F:s kritiska punkter samt deras natur (lok. max, lok. min eller sadelpunkt) mha. 2:a-derivatstestet. Jämför resultatet med F:s tecken.

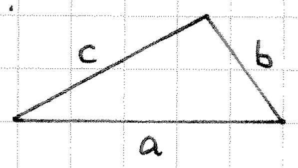
2a) Visa att fjärdegradspolynomet $p(x,y,z) = 1 - 14x - 2y + 4z - 9x^2 - 2xy + 8xz + 2yz - z^2 - z^4$ har exakt en kritisk punkt samt bestäm den.

b) Använd 2:a-derivatstestet för att avgöra, om den kritiska punkten är ett lok. max., lok. min. eller en sadelpunkt.

3) Visa mha. optimering att $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2$ för alla plana trianglar, där α, β, γ är vinklarna.

4) En excentrisk miljonär låter bygga en elliptisk simbassäng, vars rand ges av $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$ och som i punkten (x,y) har djupet $f(x,y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm de punkter, där djupet i bassängen är störst resp. minst samt djupet där.

Demo: a) Herons formel säger att en plan triangel med sidorna a, b och c har arean $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ är halva omkretsen. Vi visar Herons formel.



b) Vi visar att av alla plana trianglar med en given omkrets $2s$ är det den liksidiga triangeln, som har den största arean.

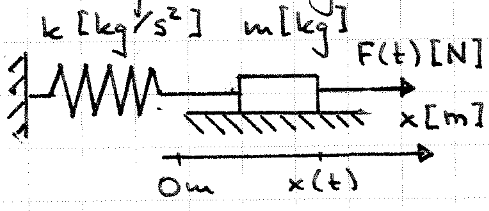
Nästa veckas hemtal på baksidan.

Fr. 1a) Använd Lagrange-multiplikatorer till att
v13 maximera och minimera $f(x,y,z) = 8x^2+4yz-16z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2+y^2+4z^2-16=0$.

b) Använd Lagrange-multiplikatorer till att maximera och minimera $f(x,y,z)=xyz$ under bivillkoren $g(x,y,z)=x^2+z^2-1=0$ och $h(x,y,z)=x-y=0$.

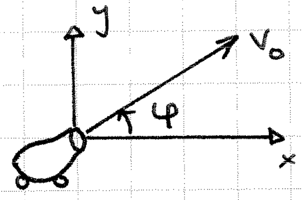
2) Visa att funktionen

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\int_{0s}^{t} F(\tau)\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}(t-\tau)\right)d\tau$$



satisfierar den ordinära differentialekvationen (ODE) $mx''(t)+kx(t)=F(t)$ och begynnelsevillkoren $x(0s)=0m$, $x'(0s)=0m/s$.

3) Vi skjuter en kanonkula med den fixa begynnelsefarten v_0 och vinkeln φ från horisontalplanet.

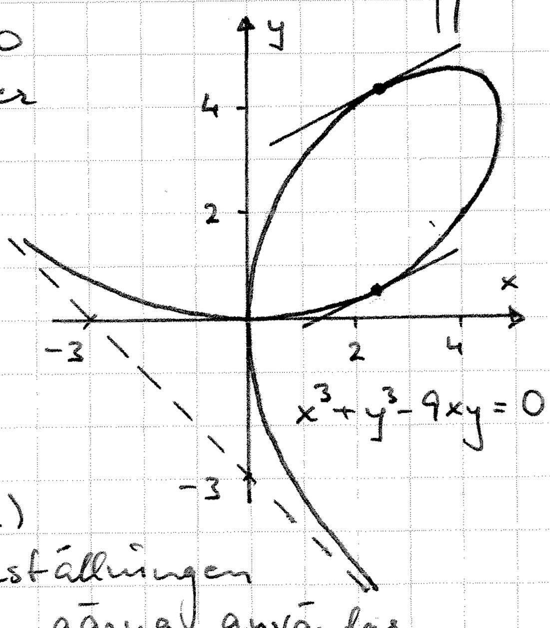


Placera koordinaterna som i fig. och bortse från luftmotstånd, Coriolis-kraft o.d. Då utsätts kulan för accelerationen $\ddot{\vec{r}}(t) = -g\vec{j}$ för $t>0s$, om vi sätter $t=0s$ i avfyrningsögonblicket.

a) (gymnasiefysik): Härled kulans position $\vec{r}(t)$ för $t\geq 0s$. När är kulan som högst? Hur högt är den då? Hur långt från kanonen landar kulan? Vilket val av φ maximerar avståndet till nedslagsplatsen?

b) (högskolematematik): Olika φ ger olika trajektorier för kanonkulorna. Bestäm trajektorieskarans envelopp.

4) Kurvan $f(x,y)=x^3+y^3-9xy=0$ kallas för Cartesii blad. Vi söker de punkter på kurvan, där lutningen är $=1/2$.



Skriv om kravet $dy/dx=1/2$ på formen $g(x,y)=0$ och använd Newtons metod för 2 ekv. och 2 obek. med begynnelsevärdena $(x_0,y_0)=(2,4)$ resp. $(x_0,y_0)=(2,1)$ en iteration. Parameterframställningen från 2:a datorövningen kan gärna användas efteråt för att studera metodens effektivitet.

Resten av övningstiden används åt uppkomna frågor.