Gk2 i Matematik, hemtal v9/08 Metrals

Ön: 1a) 12.3.4 b) 12.3.11 c) 12.3.22 d) 12.3.23

2) 12.3.36 (Jämför med funktioner av en variabel!)

3) Visa att den givna funktionen satisfierar den givna partiella differential-ekvationen:

a) $f(x,y)=\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$; $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2\equiv 0$

b) $f(x,t)=A\cos(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}+B\sin(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}$; $\partial^2 f/\partial x^2=\partial f/\partial t$ ($A$, $B$, $\kappa$ konstanter)

c) $f(x,t)=A\sin(x-ct)+B\cos(x-ct)$; $\partial^2 f/\partial t^2=c^2\cdot\partial^2 f/\partial x^2$

d) $f(r,\theta)=r^n\cdot(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$, $r\neq 0$; $r^2\cdot\partial^2 f/\partial r^2+r\cdot\partial f/\partial r+\partial^2 f/\partial\theta^2\equiv 0$ ($n\in\mathbb{Z}$; $A$, $B$ konstanter)

4) $$f(x,y)=\begin{cases}(2x^3-y^4)/(x^2+5y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Undersök om $f$ är kont. eller diskont. i origo.

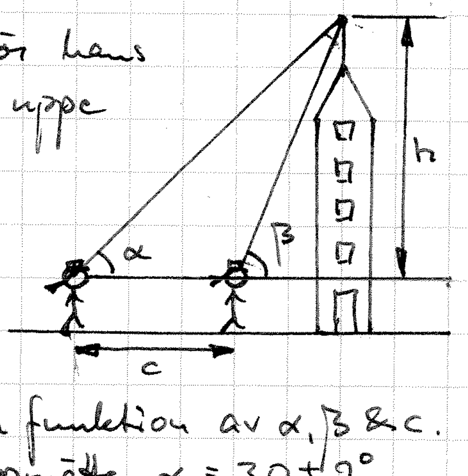
b) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ & $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ för $(x,y)\neq(0,0)$.

c) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

d) Undersök om $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kont. el. diskont. i origo.

Demo: Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^2)$, så $f$ och dess partiella derivator av ordning upp till och med 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater $r$ och $\theta$ via $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Då är $f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r,\theta)$. Vi visar mha. kedjeregeln att $(\partial F/\partial r)^2+(\frac{1}{r}\cdot\partial F/\partial\theta)^2=$ $=(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2$ (används vid area-beräkningar).

Fr: 1) Svakar vill mäta hur högt ovanför hans ögonhöjd toppen hos en flaggstång uppe på ett torn är. För detta ändamål mäter han vinkeln $\alpha$, går sträckan c mot tornet och mäter sedan vinkeln $\beta$.




a) (gymnasietrigonometri): Uttryck höjden $h(\alpha,\beta,c)$ som en funktion av $\alpha$, $\beta$ & $c$.

b) (högskolematematik): Svakar uppmätte $\alpha=30\pm2°$, $\beta=60\pm3°$ och $c=30\pm1$ m och fick $h\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c\approx 26$ m. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $h\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 30$ m som osäkerheterna i mätdata ger upphov till.

v.g.vänd

2a) Bestäm en normalvektor till ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2=55$ i punkten $P(5,3,2)$.

b) Bestäm en normalvektor till konen $x^2=y^2+4z^2$ i $P$.

c) Bestäm en tangentvektor till skärningskurvan mellan ellipsoiden och konen i punkten $P$.

I uppg. 3 & 4 ges temperaturen $T$ (temperaturenheter) i punkten $(x,y,z)$ (längdenheter) vid tiden $t$ (tidsenheter) av $T(x,y,z,t)=e^{-2t}\cdot(\cos(3x-4y)+\sin(5z))$.

3a) Visa att $T(x,y,z,t)$ satisfierar den 3-dimensionella värmeekvationen $\partial T/\partial t = c\cdot(\partial^2 T/\partial x^2+\partial^2 T/\partial y^2+\partial^2 T/\partial z^2)$ för ett visst värde på konstanten $c$ (areaenheter per tidsenhet) samt bestäm värdet på $c$.

b) Hankeiten Pelle sitter stilla i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter). Vid tiden $t=0$ (tidsenheter) erfar han temperaturen $T(0,0,0,0)=1$ (temperaturenhet). Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar han just då?

4) Svatta rör sig längs skärningskurvan mellan planet $4x-3y+2z=0$ och ytan $x\cdot e^y=y\cdot\cos z$ (längdenheter). Vid tiden $t=0$ (tidsenheter) befinner sig även hon i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter) och rör sig längs skärningskurvan med farten $v=|\bar{r}'(t)|=6$ (längdenheter per tidsenhet) i riktningen, som gör att $z$ ökar.

a) Bestäm Svattas hastighetsvektor $\bar{v}(t)=\bar{r}'(t)$ (längdenheter per tidsenhet, fast en vektor) i detta ögonblick.

b) Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar hon just då?

Demo: $f(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$. Vi inför <u>sfäriska koordinater</u> $\rho,\varphi$ och $\theta$ via $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$ (se även kap. 14.6). Då är $f(x,y,z)=f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)=F(\rho,\varphi,\theta)$. Vi uttrycker $\partial F/\partial\rho$, $\partial F/\partial\varphi$ och $\partial F/\partial\theta$ mha. $f$:s partiella derivator $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ och $\partial f/\partial z$.