GK2 i Matematik, hemtal v05/08 Mcfsalo

On: 1) Visa att talföljden är monoton och begränsad. Detta leder till att talföljden är konvergent och har alltså ett gränsvärde. Bestäm det.

a) $\{\sqrt{n^2+4n}-n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt{5}-1, \sqrt{12}-2, \sqrt{21}-3, \dots\}$

b) $\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}, \dots\}$

2a) 9.2.10 b) 9.2.14

3a) 9.3.4 b) 9.3.14

4a) 9.1.32 (Detta leder till att $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\exists$ och är $\leq e$. Sats 6 i kap. 3.4 medför att $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.)

b) 9.3.26

Demo: 9.2.26-31

Fr: 1) En dag leker Svalear med en stålkula. Han låter den falla mot ett betonggolv och lyssnar på klickarna från studsarna, som kommer allt tätare, eftersom kulan förlorar energi vid varje studs (bl.a. i form av ljud). Det låter som om kulan studsar oändligt tätt mot slutet, men att den slutar studsa efter en ändlig tid. För att undersöka fenomenet närmare släpper Svalear kulan från olika höjder h över golvet och observerar, att kulan studsar upp till höjden $p \cdot h$, där $p \in]0,1[$ och tycks vara oberoende av h.

a) (gymnasiefysik): Härled formeln för tiden t_0 det tar för kulan att falla till golvet från höjden h_0, om kulans massa är m, gravitationsaccelerationen är g, vi bortser för enkelhets skull från luftmotståndet och antar att kulan är punktformig.

b) (högskolematematik): Om vi idealiserar och tänker oss att kulan studsar oändligt många gånger mot golvet och att varje studs är momentär, hur lång sträcka kommer kulan totalt att röra sig innan den stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: rör den sig totalt en ändlig eller en oändlig sträcka?

c) (dito): Hur lång tid tar det innan kulan stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: tar det ändligt eller oändligt lång tid?

v.g. vänd

2a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n = \left(\frac{1}{1}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots = 1 + 4/9 + 27/125 + \ldots$ konvergerar och alltså har en summa S.

b) Visa att $S \in]1.5, 2.5[$, så $S = 2$, korrekt avrundat till närmaste heltal.

3a) 9.5.1 b) 9.5.3 c) 9.5.4 d) 9.5.8 i Adams. Glöm inte att undersöka seriens uppförande i eventuella ändpunkter hos konvergensintervallet.

4a) Bestäm konvergensradien R hos potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n/(2n)! = 1 - x/2! + x^2/4! - x^3/6! + \ldots$

b) Bestäm någon övre och undre gräns för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n/(2n)! = 1 - 2/2! + 2^2/4! - 2^3/6! + \ldots$ Gränserna får vara grova, men skall vara motiverade.

c) Dito för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (-2)^n/(2n)! = 1 + 2/2! + 2^2/4! + \ldots$

Demo: 9.6.11. Mha. detta kan vi approximera talet $\ln y$ för $y > 0$ med godtyckligt litet fel med enbart papper och penna, om så behövs!