Gk2 i Matematik, demo-övn. fr v3/08 Metsalo

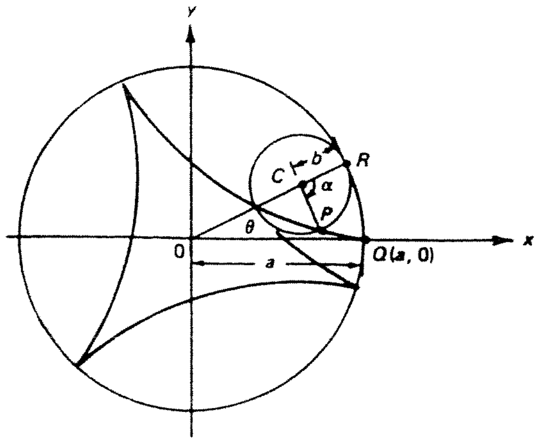
Under den närmaste framtiden täcker vi kap. 8-11 i Adams. På insidan av detta blad finns kägelsnitten på standardform. Ekvationer av typ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ger kägelsnitt och vi kan analysera dem fullständigt. Om vi i ekvationen för någon kurva i planet ersätter x med $x-x_0$ och y med $y-y_0$ motsvarar detta som bekant att vår kurva förskjuts med vektorn (x_0, y_0).

Fr: Demo: I ex.8 i kap. 8.2 i Adams härleds cykloiden, som ritas av en punkt på periferin av en cirkel, då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln, cirkelns radie är b (a i ex.8) och cirkeln rullar ovanpå x-axeln, får vi att cykloiden ges på parameterform av

$$(x,y)=(b(t-\sin t),\ b(1-\cos t)),\quad t\in\mathbb{R}$$

(se fig. 8.21, uppl. 4 / fig. 8.22, uppl. 5 / fig. 8.21, uppl. 6).
Vi kommer att härleda ekvationen för trokoiden, kurvan som ritas av en punkt på avståndet c från mittpunkten hos en cirkel med radien b, då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln och cirkeln rullar ovanpå den, blir ekvationen $(x,y)=(bt-c\sin t,\ b-c\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$ ($b=c$ ger cykloiden).

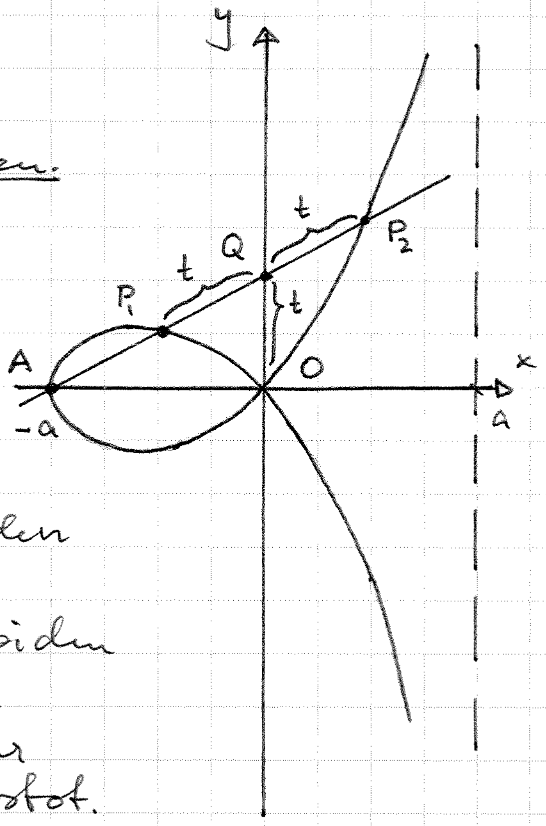
Om en cirkel med radien b rullar utan glidning inuti en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en hypocykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en hypotrokoid).



Om däremot en cirkel med radien b rullar utan glidning utanpå en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en epicykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en epitrokoid). Vi härleder ekvationen för dessa kurvor och visar, att asteroiden är en hypocykloid och att kardioiden (fig. 8.39/8.38/8.38) är en epicykloid.

(forts. på baksidan)

Om tiden tillåter, härleder vi också ekvationen för <u>strofoiden.</u> Den består av punkten $A(-a, 0)$ och alla de punkter P med egenskapen att om vi drar en linje genom A, som skär y-axeln i punkten Q, så är avstånden $|OQ| = |PQ|$. Lite eftertanke ger att strofoiden skär sig själv i origo, har lutningen ± 1 där och har $x = a$ som en vertikal asymptot.



Rita gärna dessa kurvor m.h.a. Matlab eller Mathematica som på datorövningarna i Gk1. Vidare kan det också vara intressant att rita några Lissajous-figurer (jmf. med uppg. 8.2.23−26). Pröva olika värden på m och n och titta vad som händer, om m och n har resp. saknar gemensamma faktorer. Pröva också att byta den ena eller bägge av funktionerna sin mot cos.