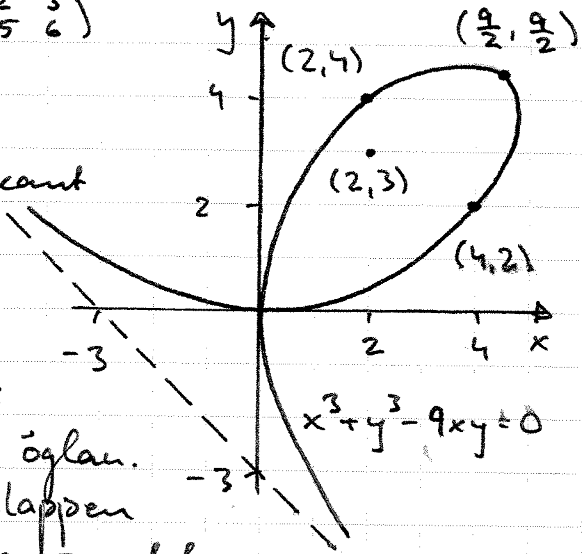
Gk2 i Matematik, datorövning 3, 17.4.2008 Metsalo

Uppgifterna kräver förberedelser hemma! Vi börjar med Matlab och fortsätter sedan med Mathematica. Logga in direkt i arbetsstationen, vid vilken ni sitter. Därefter startar ni Matlab genom att skriva matlab ↵
Matlab ritar upp nya fönster och svarar med >> när den är beredd att ta emot kommandon. Skriv format long för att få fler decimaler i de kommande räkningarna. En matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ matas in A = [1 2 3;4 5 6]




1) Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$ är bekant från bl.a. datorövningarna. Hos själva öglan är origo längst bort från punkten (2,3), men avståndet till (2,3) antar också ett lok. max och ett lok. och ett glob. min på öglan. Använd Newtons metod (hemtalslappen v10-11) för att approximera dessa tre punkter. Efteråt kan man kontrollera svaren mha. parameterframställningen av Cartesii blad från datorövning 2.
Varning: ^ (upphöjt till) tycks inte fungera i Matlab.
Men 2*2*2 och power(2,3) ger t.ex. också 2^3.
Gott råd: Avståndet till punkten (2,3) maximeras/minimeras, då avståndets kvadrat maximeras/minimeras.
Arbeta lämpligast med en 3-kolumnvektor x, vars komponenter är punktens x-koordinat, punktens y-koordinat samt Lagrange-multiplikatorn $\lambda$. Elementen i vektorn x anropas som x(1), x(2) resp. x(3). Lämpliga begynnelsevärden för x och y (dvs. x(1) och x(2)) fås ur figuren ovan, lämpliga beg.värden för $\lambda$ (dvs. x(3)) kan fås ur en av ekvationerna

$$\partial L/\partial x = 0 \ (\text{dvs. } \partial f/\partial x + \lambda \cdot \partial g/\partial x = 0) \text{ och}$$

$$\partial L/\partial y = 0 \ (\text{dvs. } \partial f/\partial y + \lambda \cdot \partial g/\partial y = 0).$$

Alternativt kan man dra till med något $\lambda$-värde och hoppas på att iterationen ändå konvergerar (går det, så går det!).

v.g. vänd

2) Matlab kan rita grafer av funktioner av två variabler. Vi ritar $z=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$ från ön v12:

```
t=-2:0.02:2; [x,y]=meshgrid(t,t);
```

bildar först en 201-vektor $t=(-2.00,-1.98,-1.96,\ldots$ $\ldots,1.98,2.00)$ och därefter två $201\times201$-matriser x och y, som innehåller x- resp. y-koordinaterna för hörnpunkterna i det rutnät, som delar upp kvadraten $-2\leq x,y\leq 2$ i mindre kvadrater med sidlängden 0.02. (Semikolon ; efter kommandot gör att resultatet inte skrivs ut.)

```
z=(x.*x-1).*(x.*x-1)-(y.*y-1).*(y.*y-1);
```

ger z-koordinaterna för dessa hörnpunkter i en $201\times201$-matris z. (Punkt . framför multiplikationen gör att multiplikationen sker <u>komponentvis.</u> x*x skulle t.ex. multiplicera $201\times201$-matrisen x med sig själv. Subtraktion sker dock automatiskt komponentvis för matriser.)

mesh(x,y,z) ritar ut grafen $z=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$.

contour(x,y,z,-3:0.5:3) ritar ut nivåkurvor för $f(x,y)=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$, närmare bestämt de nivåkurvor, som svarar mot $f=-3,-2.5,-2,\ldots$ $\ldots,2.5,3$. (Det kan hända, att figuren är gömd bakom Matlab-fönstret. Den blir dock synlig, om ni klickar på dess kant, eventuellt efter att ni flyttat på Matlab-fönstret.)

Lämna Matlab mha. quit och starta Mathematica.

3) Använd NIntegrate för att approximera längden och tyngdpunkten hos Vivianis kurva från ön v7 och 2:a datorövningen (sätt $a=1$). Av symmetriskäl finns tyngdpunkten naturligtvis på y-axeln.

4) Mathematica kan även beräkna multipla integraler. Använd Integrate för att beräkna volymen hos miljonärens bassäng från ön v12.

5) Mathematica kan skissa ytor på parameterform mha. ParametricPlot3D (jmf. med 2:a datorövningen).

a) Skissa Möbius-bandet $\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = ((1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\cos v, (1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\sin v, u\cdot\sin\frac{v}{2})$ för $u \in [-1/4, 1/4]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

b) Skissa ytan $\bar{r}(u,v) = (\tan v - u\cdot\sin v, -u, 1-u\cdot\cos v)$ för $u \in [-2,4]$, $v \in [-1.4, 1.4]$. Sätt PlotRange -> All inuti ParametricPlot3D - kommandot, så inte Mathematica kapar av en del av ytan.

c) Approximera arean hos ytan i b)-delen mha. NIntegrate.

d) Skissa helicoiden $\bar{r}(u,v) = (u\cdot\cos v, u\cdot\sin v, 8v)$, $u \in [6,15]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$ från morgondagens räkneövning. Vrid sedan på figuren genom att klicka på den med musen. (Och passa på att kontrollera area-beräkningen inför i morgon!)

Därefter går vi över till skalär- och vektorfälten i kap. 15 och nabla-räkning med grad, div och rot i kap. 16 i Adams.

6a) Skissa åter grafen av $f(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$, denna gång mha. Plot3D (dubbelklicka för att få ^). Skissa f:s nivåkurvor mha. ContourPlot. $-2 \le x, y \le 2$ är fortfarande ett lämpligt område. PlotPoints -> 30, Contours -> 16 inuti ContourPlot - kommandot ger en bättre figur.

b) Skissa vektorfältet $\bar{u}(x,y) = \text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ mha. PlotVectorField. (D ger även part. derivator!) Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $f$ och $\nabla f$: $\nabla f$ pekar åt det håll varåt $f$ ökar snabbast och dess längd ger f:s ökningshast. i den riktningen.

c) Skissa skalärfältet $g(x,y) = \text{div}(\bar{u}) = \nabla\cdot\bar{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, där $\bar{u}$ är vektorfältet från b)-delen mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $\bar{u}$ och $\nabla\cdot\bar{u}$: $\nabla\cdot\bar{u}$ är positivt, där $\bar{u}$ lokalt sprider sig och negativt, där $\bar{u}$ lokalt drar sig samman.

v.g. vänd

7) Sätt nu $f(x,y) = \sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)\cdot((x-1)^2+y^2)}$ och skissa vektorfältet $\bar{v}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j} = (-2xy/f(x,y))\hat{i} + ((x^2-y^2-1)/f(x,y))\hat{j}$.
Vi kan tänka oss $\bar{v}$ som ett plant vektorfält i $\mathbb{R}^3$: $\bar{v}(x,y,z) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j} + 0\hat{k}$.
Då kan vi beräkna vektorfältet $\bar{w}(x,y,z) = \mathrm{rot}(\bar{v}) = \nabla\times\bar{v} = \{\text{räräkn.}\} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\hat{k} = h(x,y)\hat{k}$. Skissa skalärfältet $h(x,y)$, som alltså är vektorfältets $\nabla\times\bar{v}$ $\hat{k}$-komponent (enda komponenten, eftersom $\bar{v}$ är ett plant vektorfält parallellt med xy-planet) mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna för $h$ och vektorfältet $\bar{v}$ mha. Show (gör åter PlotPoints -> 30, Contours -> 16) och studera sambandet mellan $\bar{v}$ och $\nabla\times\bar{v}$.

Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret och anropa Mozilla genom att skriva mozilla

8) Skriv adressen http://matta.hut.fi/matta2/ och välj DEW1 från Materiaalit. DEW1 är ett paket för numerisk (approximativ) lösning av 1:a ordningens ordinära differentialekvationer på formen $y'(t) = f(t, y(t))$.
Genom att skriva in diff.ekvationen i rutan vid $y' = \ldots$ (märk att den oberoende variabeln heter $t$, inte $x$) eller genom att välja någon av de färdiga diff.ekvationerna under Choose, får man DEW1 att rita ett fält av <u>tangentlinjesegment</u> till lösningskurvorna och om man sedan väljer en punkt genom att klicka med musen eller genom att mata in punktens koordinater manuellt, får man datorn att rita en approximation till lösningskurvan till diff-ekvationen, som går genom den punkten.

Lämna Mozilla och glöm inte att logga ut.