Gk2 i Matematik, hemtal v17/07 Metsalo

Detta är <u>näst sista hemtalsomgången</u>. Sista datorövningen äger rum to 26.4. (uppgifterna delas ut separat) och sista hemtalsomgången v18. De, som önskas att denna kurs räknas som gamla Gk2 (Mat-1.452, 6sv), måste meddela mig detta, förslagsvis via e-post. Annars räknas kursen som nya Gk2 (Mat-1.1520, 10sp).

On: 1a) 16.1.10 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_r$)

b) 16.1.11 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_\theta$)

2) Låt $\bar{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vara en konstant vektor och $\bar{r}$ positionsvektorfältet $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Förenkla

a) $\nabla(\bar{u}\cdot\bar{r})$ b) $\nabla(\bar{r}\cdot\bar{r})$ c) $(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r}$ d) $\nabla\cdot(\bar{u}\times\bar{r})$ e) $\nabla\times(\bar{u}\times\bar{r})$ f) $(\bar{u}\times\nabla)\times\bar{r}$

3) Ett vektorfält $\bar{F} = F_1(x,y,z)\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + F_3(x,y,z)\hat{k}$ av klass C^1 kallas <u>källfritt</u>, om $\nabla\cdot\bar{F} = \mathrm{div}(\bar{F}) \equiv 0$ och <u>virvelfritt</u>, om $\nabla\times\bar{F} = \mathrm{rot}(\bar{F}) = \mathrm{curl}(\bar{F}) \equiv \bar{0}$.

a) Bestäm parametrarna α, β & γ så att vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = (2x+z+e^y\sin(\alpha x))\hat{i} + (3y - e^y\cos(\alpha x))\hat{j} + (x+\beta y+\gamma z)\hat{k}$ är såväl källfritt som virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.

b) Virvelfriheten i $\mathbb{R}^3$ medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) skalär potential $\Phi \ni \bar{F} = \nabla\Phi = \mathrm{grad}(\Phi)$. Bestäm en sådan skalär potential.

c) Källfriheten i $\mathbb{R}^3$ medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) vektorpotential $\bar{G} \ni \bar{F} = \nabla\times\bar{G} = \mathrm{rot}(\bar{G}) = \mathrm{curl}(\bar{G})$. Använd metoderna i ex 1, kap. 16.2 till att bestämma en sådan vektorpotential. (Här har vi mer valmöjlighet än i b)-delen: vi kan ostraffat välja $\hat{i}$-, $\hat{j}$- eller $\hat{k}$-komponenten i $\bar{G}$ till att vara $\equiv 0$. I ex. valdes $\hat{j}$-komponenten $\equiv 0$.)

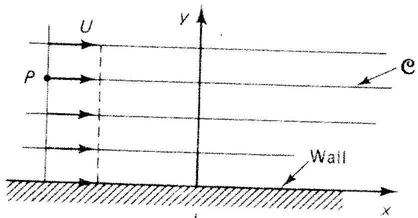
4a) Visa att om φ och ψ är skalärfält av klass C^2, så är $\nabla\times(\varphi\cdot\nabla\psi) = \nabla\varphi\times\nabla\psi = -\nabla\times(\psi\cdot\nabla\varphi)$

b) För vektorer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$ gäller det att $\bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = 0$. Ge ett exempel på ett vektorfält $\bar{F}(x,y,z)$ av klass C^1 i $\mathbb{R}^3$ sådant att $\bar{F}\cdot(\nabla\times\bar{F}) = \bar{F}\cdot(\mathrm{rot}(\bar{F})) = \bar{F}\cdot(\mathrm{curl}(\bar{F})) \not\equiv 0$ (inte identiskt lika med 0; det gör inget om $\bar{F}\cdot(\nabla\times\bar{F}) = 0$ i somliga punkter). Beräkna också $\bar{F}\cdot(\nabla\times\bar{F})$ i någon punkt, där $\bar{F}\cdot(\nabla\times\bar{F}) \neq 0$.

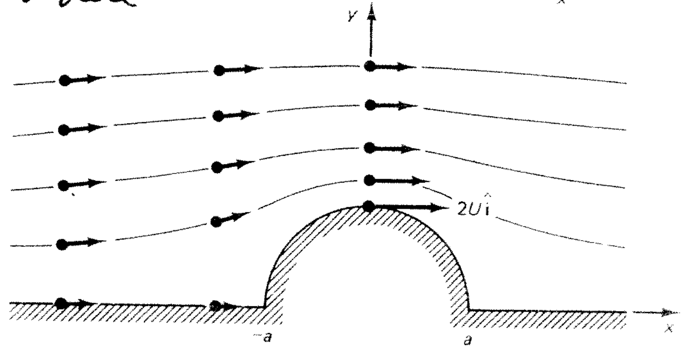
Demot och fredagens hemtal på insidan. Uppgifterna till fjolårets tusbotentamen finns på baksidan.

Demo: Utanför en punktmassa M finns ett gravitations-accelerationsfält $\bar{a}(\bar{r}) = -\frac{GM}{|\bar{r}|^3}\cdot\bar{r}$, som i figuren vid förra fredagens demo, där origo är i M och G är den universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams; $G \approx 6.670 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$). Demo fr v13 gav att vi får samma gravitationsaccelerationsfält utanför ett homogent sfäriskt skal och utgående från detta får vi att gravitationsaccelerationsfältet är detsamma också utanför en sfäriskt symmetrisk kropp.
Utgående från detta och mha. divergenssatsen (Gauss' sats) och resultatet från förra fredagens demo visar vi att gravitationsaccelerationsfältets flöde in genom en sluten, orienterbar yta är direkt proportionell mot massan inuti ytan.

Fr: 1) Om vi har en inkompressibel vätska, som strömmar i övre halvplanet $y > 0$, kan dess hastighetsfält ges av $\bar{v}(x,y) = U\hat{i}$ som i den övre figuren till höger.



Om vi lägger en halvcirkulär vall i vätskans väg, som i den undre figuren (figurerna stulna ur M.D. Greenberg: Advanced Engineering Mathematics), får vi hastighetsfältet $\bar{v}(x,y) = U\cdot\left(\hat{i} + \frac{a^2}{(x^2+y^2)^2}\left((y^2-x^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}\right)\right)$ för $x^2+y^2 > a^2$, $y > 0$.



a) Visa att $\bar{v}$ är parallell med vallen (dvs. ortogonal mot vallens normal) längs vallen och att $\bar{v} = \bar{0}$ endast i de två hörnen $(\pm a, 0)$.

b) Visa att $\bar{v}$ är källfritt, dvs. att $\operatorname{div}(\bar{v}) = \nabla\bullet\bar{v} \equiv 0$.

2a) 16.4.20 b) 16.4.21

3) Beräkna flödet $\oiint_S (\bar{F}\bullet\hat{N})\,dS$ av vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = \hat{i} + y\hat{j} + z^2\hat{k}$ ut genom sfären $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\}$

a) direkt som en ytintegral

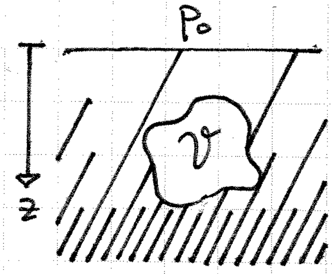
b) genom att omvandla den till en rymdintegral mha. Gauss' sats (divergenssatsen).

4) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial S} \bar{v} \bullet d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} + 3x\hat{k}$ längs randkurvan ∂S av halvsfären $S: x^2+y^2+z^2 = 16,\ z \geq 0$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att omvandla den till en ytintegral mha. Stokes' sats.

Demo: I en vätska med den variabla densiteten $\delta(z)$ (som förmodligen ökar med djupet z) ges trycket på djupet z av $p(z) = p_0 + \int_{0}^{z} g \cdot \delta(\zeta)\, d\zeta$, där p_0 är lufttrycket vid ytan och g är tyngdkraftsaccelerationen.



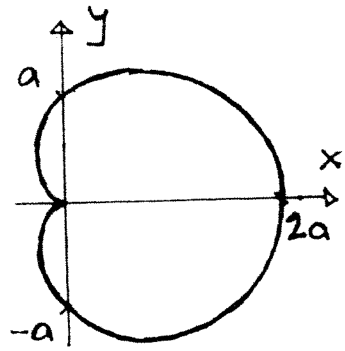
Om en kropp V nedsänkes i vätskan, kommer vätsketrycket att påverka kroppen med en kraft. Med hjälp av Gauss' universalsats (vektorversionen av divergenssatsen) härleder vi

<u>Archimedes' princip:</u> Lyftkraften, varmed en vätska påverkar en i den nedsänkt kropp är lika med den undanträngda vätskans tyngd.

I kap. 16.6 och bland övningsuppgifterna visas det hur flera lagar inom bl.a. fysiken följer ur diverse matematiska satser, främst integralsatserna. Där skördas på sätt och vis frukterna av vårens arbete. Studera kapitlet <u>ingående</u>!

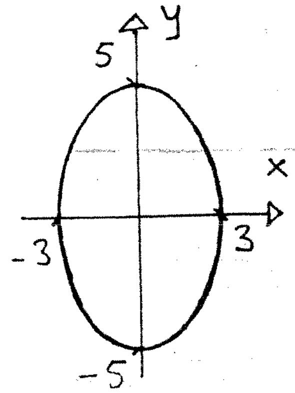
MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 1, 2, 5, 6 och 10.

Vid denna turbotentamen får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Kardioiden, som i polära koordinater ges av $r = a(1 + \cos\theta)$ (se figuren till höger) roterar kring x-axeln. Därvid uppstår en rotationssymmetrisk yta. Visa att dess area är $32\pi a^2/5$.

2. Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-1/2}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är < 0.0005. (Fickräknarens värde $e^{-1/2} \approx 0.60653066$ får gärna användas *efteråt* för kontroll.)



3. Krökningen $\kappa(t)$ hos en kurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\kappa(t) = \frac{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}$ och krökningsradien $\rho(t)$ av $\rho(t) = 1/\kappa(t)$. Beräkna krökningsradien hos ellipsen $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ (se figuren till höger) i de punkter, där den skär koordinataxlarna. Gott råd: börja gärna med att bestämma en lämplig parametrisering av ellipsen.

4. För en liten silverkluns på formen av en rät cirkulär cylinder uppmättes följande: radien $r = 0.50 \pm 0.01cm$, höjden $h = 2.20 \pm 0.03cm$, massan $m = 17.2 \pm 0.1g$.
a) Vad ger detta för approximativt värde på silverklunsens densitet? (1p.)
b) Använd *differentialen* till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i skattningen av densiteten i a)-delen, som osäkerheterna i r, h och m ger upphov till. (5p.)

5. I vilka punkter skär normallinjen till ytan $z = x^2y^3$ i punkten $(1, 2, 8)$ koordinatplanen?

6. Temperaturen i punkten (x, y, z) på enhetssfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ ges av $T(x, y, z) = xy+yz$ (godtyckliga enheter). I vilken punkt / vilka punkter är temperaturen högst och hur hög är den där?

7. Visa att vektorfältet $\vec{F}(x, y, z) = \cos y\vec{\imath} + (2ye^z - x\sin y)\vec{\jmath} + (y^2e^z + 3z^2)\vec{k}$ är virvelfritt i $\mathbf{R}^3$, dvs. att $\nabla \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}) = \text{curl}(\vec{F}) \equiv \vec{0}$ samt bestäm en potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ till $\vec{F}$ sådan att $\vec{F} = \nabla\Phi = \text{grad}(\Phi)$. Använd potentialfunktionen för att beräkna $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, där C är en halvcirkelbåge från $(0, 1, 0)$ till $(-3, 0, 2)$.

8. Beräkna flödet $\oiint_S \vec{v} \bullet \hat{N} dS$ av vektorfältet $\vec{v}(x, y, z) = \vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ ut genom sfären S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ antingen direkt som en ytintegral eller genom att omvandla den till en trippelintegral med hjälp av divergenssatsen (Gauss' sats). Gott råd: utnyttja symmetrin.

9. a) En icke-linjär differentialekvation på formen $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x) \cdot (y(x))^a$, där $a \notin \{0, 1\}$, g och h är givna funktioner och y är den sökta funktionen, kallas för en *Bernoulli*-ekvation. Visa att den kan omvandlas till en linjär differentialekvation genom att införa en hjälpfunktion $z(x) = (y(x))^{1-a}$.
b) Lös Bernoulli-ekvationen $y'(x) - 2y(x) = -(y(x))^2$ under begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ t.ex genom att omvandla den till en linjär differentialekvation eller genom att utnyttja att det rör sig om en separabel differentialekvation.

10. Beräkna volymen hos kroppen, som finns innanför den räta cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = x$ och enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Gott råd: på grund av kroppens form kan cylindriska koordinater vara lämpliga. (Svar: $V \approx 1.2055$)