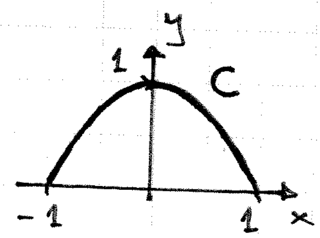
Gk2 i Matematik, hemtal v16/07 Mettsalo

Ou: 1a) 15.1.3 b) 15.1.5 c) 15.1.6

2) Den plana kurvan $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2, -1 \le x \le 1\}$ till höger har i punkten $(x,y) \in C$ längddensiteten $\delta(x,y) = x^4 + y$. Av symmetriskäl finns C:s tyngdpunkt på y-axeln. Bestäm C:s längd, massa och tyngdpunkt. Låt gärna Mathematica göra slavgörat! (Jämför också med uppg. 1, on v13 och uppg. 2, on v14. Då var det ett plant område vi studerade, men här studerar vi en kurva.)



3) Uppg. 3, mellanförhör 3-05 (se insidan av förra hemtalslappen)

4) Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$, där C är räta linjen från origo till punkten (1, 2, 3) och $\bar{F}(x,y,z) = (e^z + \frac{1}{1+x^2})\hat{i} + 2yz\hat{j} + (xe^z + y^2)\hat{k}$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att visa att $\bar{F}$ är konservativt, bestämma $\bar{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi = \bar{F}$ och beräkna W mha. potentialfunktionen.

Demo: Ytor ges inte alltid som grafer av funktioner, dvs. som $z = f(x,y)$ eller på parameterform, dvs. som $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$. Vi härleder formler med vilkas hjälp vi ibland kan integrera över ytor på formen $F(x,y,z) = 0$.

Fr: 1) Beräkna a) $\int_C \bar{u} \bullet d\bar{r}$ och b) $\int_C \bar{u} \times d\bar{r}$, då $\bar{u}$ är vektorfältet $\bar{u}(x,y,z) = \sqrt{z}\,\hat{i} + x\hat{j} + y^2\hat{k}$ och C är parabeln $x = 2$, $y^2 = z$ från punkten $(2,-1,1)$ till punkten $(2,1,1)$. (Parametrisera kurvan!)

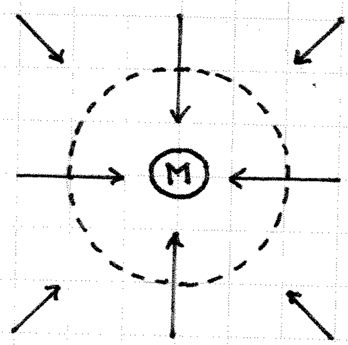
2a) Uppg. 3, mellanförhör 3-06 (se insidan av förra hemtalslappen)

b) Bestäm massan hos rotationsparaboloiden $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le (3a)^2, z = 2a(1 - \frac{x^2+y^2}{(3a)^2})\}$, om areadensiteten är $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. (Jmf. med uppg. 4, on v14. Då var det en kropp vi studerade, här är det en yta.) Använd gärna polära koordinater.

Forts. på baksidan

3) Uppg. 4, mellanförhör 3-05 (se åter insidan av första hemtalslappen)

4) 15.6.7 (Parametrisera ytan!)



Demo: Vi beräknar flödet av gravitationsaccelerationsfältet utanför en punktmassa M (eller enligt demo, fr v13: utanför en sfäriskt symmetrisk kropp med massan M) in genom en (tänkt) sfäryta med radien R och mittpunkten i punktmassan M. (Jämför med ex 1, kap. 15.6.) Kombinerat med Gauss' sats (divergenssatsen) får vi senare ett intressant resultat för allmänna slutna ytor och allmänna massfördelningar.

På insidan finns ett supplement om differentialekvationer.

Litet supplement om exakta differentialekvationer och ortogonala kurvskaror (se även Gk 1).

Givet en funktion $F(x,y)$ av två variabler kan vi bestämma en ordinär differentialekvation (ODE), vars lösningskurvor är F:s nivåkurvor, dvs. kurvorna $F(x,y)=C$:

Ansätt, att y är en (implicit) funktion av x och derivera VL och HL med avseende på x:
$\frac{d}{dx}(F(x,y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(C) = 0.$
Om vi betecknar $\partial F/\partial x$ med $M(x,y)$ och $\partial F/\partial y$ med $N(x,y)$ och övergår till differentialer, kan vi skriva denna ODE på formen

$$\underline{M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0},$$

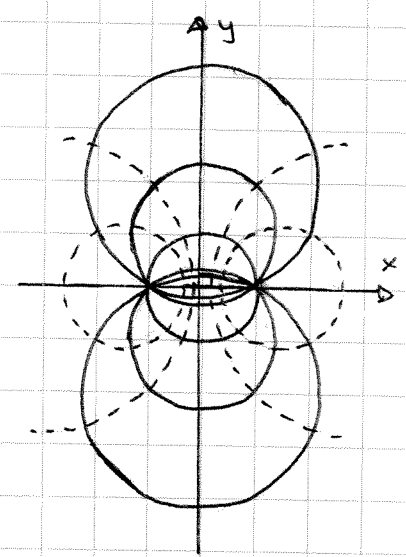
där $\partial M/\partial y = \partial^2 F/\partial y\partial x = \partial^2 F/\partial x\partial y = \partial N/\partial x.$

En differentialekvation, som kan skrivas som $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$ (eller ekvivalent som $M(x,y)+N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$), där $\underline{\partial M/\partial y = \partial N/\partial x}$, kallas för en <u>exakt</u> differentialekvation. Dess lösningskurvor är <u>nivåkurvorna</u> till en funktion $F(x,y)$ sådan att $\partial F/\partial x = M$, $\partial F/\partial y = N$.

Denna exakta ODE kan också skrivas på formen $\frac{dy}{dx} = y'(x) = -M(x,y)/N(x,y) = k_1(x,y)$, vilket gör det möjligt att rita <u>ett fält av tangentlinjesegment</u> för lösningarna till diff.ekvationen.

Om vi nu sätter upp en <u>ny</u> ODE $y'(x) = k_2(x,y)$, där $k_1(x,y)\cdot k_2(x,y) = -1$ i varje punkt där $k_1(x,y)\neq 0$, kommer lösningskurvorna till denna nya ODE alltid att skära den ursprungliga kurvskaran $F(x,y)=C$ ortogonalt. Då har vi bildat <u>ortogonala kurvskaran</u> till skaran av nivåkurvor för funktionen $F(x,y)$.

Ex: Vi bestämmer ortogonala kurvskaran till skaran av cirklar genom punkterna $(\pm a, 0)$ i figuren t.h. Diff. ekvationen för den ortogonala kurvskaran är inte exakt (och inte heller linjär eller separabel), men kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor $\mu = \mu(x)$, som inte beror på y.



Cirklarna: vår cirkelskara har mittpunkterna på y-axeln och cirkeln med mittpunkten $(0, C)$ har radien $\sqrt{a^2+C^2}$ och ekvationen $x^2 + (y-C)^2 = a^2 + C^2$, så cirkelskarans ekvation kan skrivas $F(x,y) = (x^2+y^2-a^2)/2y = C$. Genom att ansätta, att $y = y(x)$ och derivera VL & HL map. x får vi
$\frac{d}{dx}((x^2+(y(x))^2-a^2)/2y(x)) = \frac{1}{2}\left[2xy - (x^2-y^2-a^2)\cdot\frac{dy}{dx}\right]/y^2 = \frac{d}{dx}(C) = 0$
eller $\frac{dy}{dx} = y' = 2xy/(x^2-y^2-a^2) = k_1(x,y)$. Denna ODE har alltså som lösningskurvor cirklarna i cirkelskaran.

Ortogonala kurvskaran ges av en annan ODE:
$\frac{dy}{dx} = y' = k_2(x,y) = -1/k_1(x,y) = (a^2 - x^2 + y^2)/2xy$, som kan skrivas om mha. differentialer på formen
$(a^2 - x^2 + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = M\cdot dx + N\cdot dy = 0$.
$\partial M/\partial y = 2y \neq \partial N/\partial x = -2y$, så denna ODE är inte exakt.
Ansats: Integrerande faktor $\mu(x)$ (oberoende av y)
$\mu(x)\cdot(a^2-x^2+y^2)\cdot dx - \mu(x)\cdot 2xy\cdot dy = 0$. Vi vill få
$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)\cdot(a^2-x^2+y^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu(x)\cdot 2xy)$, dvs. att denna nya ODE (efter multiplikation med $\mu(x)$) är exakt.
Detta ger $2y\cdot\mu(x) = -2xy\cdot\mu'(x) - 2y\cdot\mu(x)$, dvs. att $x\cdot\mu'(x) + 2\mu(x) = 0$. Detta är en 1:a ordningens linjär, homogen ODE för $\mu(x)$ och $\mu(x) = 1/x^2$ är en lösning. Nu får vi en exakt ODE för den ortogonala kurvskaran: $\frac{1}{x^2}\cdot(a^2-x^2+y^2)\cdot dx - \frac{1}{x^2}\cdot 2xy\,dy = M_1\cdot dx + N_1\cdot dy = 0$.
$\partial M_1/\partial y = 2y/x^2 = \partial N_1/\partial x$, så vi har exakthet!
Lösningskurvorna ges som $G(x,y) = C$ där $\frac{\partial G}{\partial x} = M_1 = \frac{1}{x^2}(a^2-x^2+y^2)$ och $\frac{\partial G}{\partial y} = N_1 = -\frac{1}{x^2}\cdot 2xy$ vilket ger att $G(x,y) = -\frac{a^2}{x} - x - \frac{y^2}{x}$ (t.ex.). Nivåkurvorna för $G(x,y)$, dvs. den ortogonala kurvskaran, kan också skrivas som $(x + \frac{C}{2})^2 + y^2 = \frac{C^2}{4} - a^2$, vilket också ger en cirkelskara (streckade i figuren ovan).