Gk2 i Matematik, demo-övn. on v8/07 Metsalo

Onsdagens räkneövning används åt att gå igenom nedanstående två demon för att illustrera vad partiella derivator används till. Tisdagens föreläsning, måndagens och tisdagens mottagningar (före mellanförhöret) och fredagens räkneövning (efter mellanförhöret) är inställda.

Demo 1) En ekvation, där partiella derivator av en sökt funktion av flera variabler ingår, kallas för en partiell differentialekvation (PDE). Låt $T(x,t)$ ange temperaturen i en stång vid positionen $x$ vid tiden $t$. Då gäller att $\partial T/\partial t = \delta \cdot \partial^2 T/\partial x^2$, där $\delta$ är en materialkonstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) värmeekvationen. Vi motiverar ekvationen samt visar, att $T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-x^2/4\delta t}$ satisfierar den.

Demo 2) Om en sträng är fastspänd mellan punkterna $x=0$ och $x=L>0$ på x-axeln och $y(x,t)$ anger strängens utslag från viloläget (dvs. x-axeln) vid positionen $x$ vid tiden $t$, så gäller att $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 y/\partial x^2$, där $c$ är en konstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) vågekvationen. Vidare gäller att $y(0,t) = 0 = y(L,t)$ för alla $t$ (randvillkor; RV). Om strängen utdrages från viloläget och släppes från vila (utan begynnelsehastighet) vid tiden $t=0$, har vi även begynnelsevillkoret (BV) $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ för $x \in [0,L]$.

Vi motiverar ekvationen samt visar, att $y_n(x,t) = \sin(\frac{\pi n x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{\pi n t}{L})$ satisfierar vågekvationen, randvillkoren och begynnelsevillkoret för $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($n=1$ ger oss grundtonen, $n>1$ ger oss övertoner). Vi visar också, att $y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{n\pi t}{L})$ också sat. vågekv. och villkoren för varje val av konstanterna $a_n$ och varje ändligt $N$. Genom lämpliga val av $a_n$ kan vi då också försöka sat. begynnelsevillkor av typ $y(x,0) = f(x)$, $x \in [0,L]$.