Gk1 i Matematik, hemtal v7/07 Metsalo
samt datorövning 1, to 15.2.2007 (på insidan)

Tisdagen 20.2. har vi <u>1:a mellanförhöret</u>, som omfattar kap. 8–11 i Adams med undantag för kap. 9.10, uppl. 4/ /kap. 9.9, uppl. 6, som behandlar Fourier-serier samt kap. 10.7, uppl. 5&6, som behandlar matrisräkning med Maple. I gengäld ingår kap. 17.9, uppl. 4/ kap. 17.7, uppl. 6, som behandlar lösning av ordinära differential-ekvationer mha. serier (kap. 9.10 i uppl. 5). Till mellanförhöret får vanliga funktionsräknare medtagas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte medtagas.

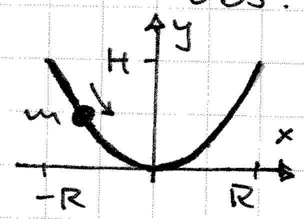
Föreläsningen ti 20.2. (strax före mellanförhöret) och mottagningarna må 19.2. och ti 20.2 är <u>inställda</u>. Planera alltså studerandet (och Kårspexandet!) så att alla frågor kan ställas redan fr 16.2.

Ov: 1) 11.5.13. Mha. detta får vi metoder att göra skisser av ellipser med enbart passare och linjal.

2) 11.5.24.

3) 11.5.16. I uppl. 4 förekommer ett olyckligt <u>tryckfel:</u>
Det skall stå $$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2-f(\theta)\cdot f''(\theta)|}{[(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2]^{3/2}}$$ Obs!

4) En pärla med massan m startar från vila från punkten $(-R, H)$ och glider (inte rullar) längs en tråd böjd till parabeln $y = Hx^2/R^2$ till punkten (R, H) utan friktion under inverkan av tyngdkraften $\bar{F} = -mg\hat{j}$. Bestäm pärlans fart och centripetalacceleration i



a) punkten $(0,0)$ b) punkten $(R/2, H/4)$.

Demo: Vi visar att kurvan $\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ har evolutan $\bar{r}_c(t) = \xi(t)\hat{i} + \eta(t)\hat{j}$, där

$$\xi(t) = x(t) - y'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2+(y'(t))^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$ och

$$\eta(t) = y(t) + x'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2+(y'(t))^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$

(förutsatt att kurvan är "tillräckligt snäll").

Fredagens hemtal finns på baksidan.

Datorövning 1, 15.2.2007

0) Vi använder programpaketet Mathematica. Läs igenom uppg. 0 från höstens datorövning 1 samt sammanfattningen av Mathematica från höstens datorövning 2. De finns på kursens hemsida under rubriken Övningsuppgifter.
Jag hade problem med användandet av ^ (upphöjt till) och ` (apostrof). Men genom att trycka två gånger fick jag upp motsvarande tecken.

1) Rita kurvan $(x, y) = (\frac{t}{4} \cdot (t-9)(t-24), t(t-24))$ från uppg. 3, fr v3 mha. ParametricPlot.

2) Bestäm definitionsmängden för $r = f(u) = \arccos(1-2u) - u^2$ och därefter de t-värden för vilka $u = g(t) = (t/\pi - 1/2)^2$ tillhör f:s def.mängd. Ladda sedan programpaketet Graphics mha. kommandot << Graphics`Graphics` och rita kurvan $r = f(g(t))$, där t är polära vinkeln (ofta betecknad θ) mha. PolarPlot (kanske vill ni skicka kurvan till någon bekantskap från igår). Axlarna fås bort mha. Axes -> None inuti PolarPlot-kommandot. Beräkna även arean innanför kurvan.

3) Rita kurvan, som ges i polära koordinater av $r = \cos^2 t$ (där t åter är polära vinkeln, betecknad θ i Adams) mha. PolarPlot. Beräkna volymen V hos en av "bollarna" som uppstår, då kurvan roterar kring x-axeln mha. Integrate och approximera arean A hos "bollens" begränsningsyta mha. NIntegrate. Använd kontrollen $A^3/V^2 \geq 36\pi$ från hemtal 4, fr v3.

4a) Rita Vivianis kurva från i fredags mha. ParametricPlot3D samt kurvans projektioner på koordinatplanen.
b) Rita sömmen hos Svakars tennisboll från i fredags och approximera dess längd mha. NIntegrate.

5a) Rita kurvan som ges i polära koordinater av $r = 2 + \cos(3t/2)$ (där t är polära vinkeln) mha. PolarPlot.

b) Rita överhandsknopen från i fredags mha. ParametricPlot3D.

c) $\bar{r}(t,v) = (x(t,v), y(t,v), z(t,v)) =$

$$= ((2+\cos(3t/2))\cdot\cos t + \tfrac{1}{5}\cdot\cos t\cdot\cos v,$$
$$(2+\cos(3t/2))\cdot\sin t + \tfrac{1}{5}\cdot\sin t\cdot\cos v,$$
$$\sin(3t/2)\cdot\sqrt{21}/5 + \tfrac{1}{5}\cdot\sin v),\ t\in[0,4\pi],\ v\in[0,2\pi]$$

ger en <u>yta på parameterform</u>, nämligen en förtjockad version av knopen i b)-delen. Rita även den mha. ParametricPlot3D.

6) Låt $a=\sqrt{5}+1$ och $b=2$. Skriv om ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ på parameterform som i gårdagens uppg. 1 och rita den mha. ParametricPlot. Rita också dess evoluta (se gårdagens demo) och sammanför de två bilderna mha. Show. AspectRatio->1 inuti Show-kommandot gör att figurerna täcker en kvadrat. Med våra val av a och b medför detta att vi får samma skala på axlarna. Tänk på hur den ursprungliga kurvan kan återskapas ur evolutan mha. ett snöre och en penna.

7) $(x,y)=\left(\frac{9-9t^2}{2+6t^2}\cdot(1-t),\ \frac{9-9t^2}{2+6t^2}\cdot(1+t)\right)$

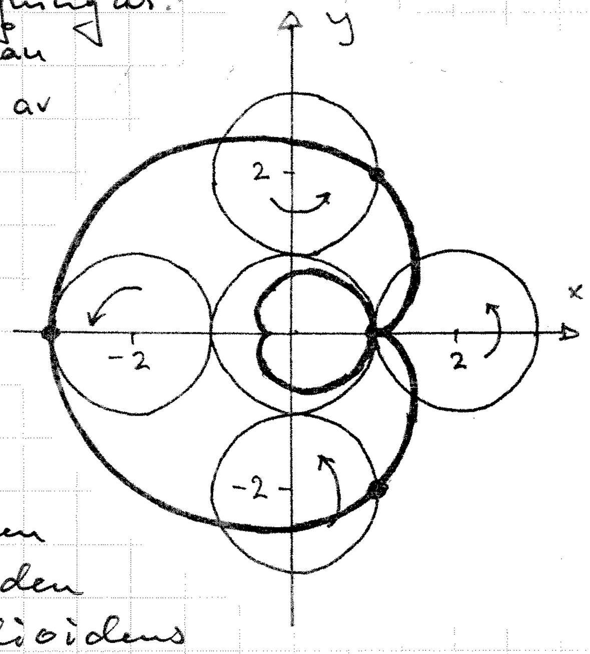
ger Cartesii blad $x^3+y^3=9xy$ på parameterform. Rita kurvan och dess evoluta och bestäm kurvans krökningsradie i origo (där vi inte kan använda implicit derivering, eftersom ingendera variabeln är en funktion av den andra i en omgivning av origo). Beräkna även arean innanför öglan hos kurvan.

8) Använd Sum och Infinity för att beräkna hur mycket David, Niklas, Petter och Qvintus dricker under sillfrukosten.

9) Rita gärna några kurvor från demo-övn. om v3.

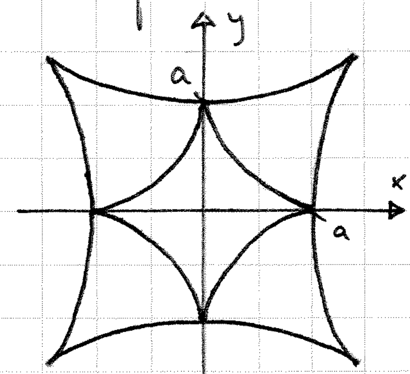
Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret mha. musen och logga ut mha. musen.
Fredagens hemtal finns på baksidan.

Fr: 1) 11.R.7 (Review)
2) 11.R.9
3) 11.R.11 (använd formlerna från onsdagens demo)
Tillsammans med förra fredagens demo ger uppg. 3) den isokrona pendeln. För en vanlig matematisk pendel beror svängningstiden nämligen på utslagsvinkeln, även om den nästan är konstant för små svängningar.
4) Kardioiden är bekant från demo-övn. on v3. Den ges av $(x,y) = (2\cos t - \cos(2t),\ 2\sin t - \sin(2t))$. Visa att kardioidens evoluta (se onsdagens demo) är en kardioid, skalad $1/3$ och vriden $180°$ som i figuren till höger.



Ur den mindre kardioiden kan vi alltså återskapa den större (den mindre kardioidens evolvent) mha. ett snöre och en penna.

Demo: Asteroiden $\bar{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ är bekant bl.a. från busstrappstegen.
Vi visar att asteroidens evoluta är en annan, större asteroid som i figuren t.h.



Pga. de inställda mottagningarna i början av nästa vecka är det lämpligt att ställa alla frågor på fredag!