Gk2 i Matematik, hemtal v5/07 Metsalo

Torsdagen 15.2. har vi <u>1:a datorövningen</u>, då vi (låter) kommer att använda programpaketet Mathematica. Under rubriken Övningsuppgifter på <u>kursens hemsida</u> finns datorövningsuppgifterna från höstens Gk1. Det kan löna sig att friska upp minnet.

Ov: 1) En dag leker Svakar med en stålkula. Han låter den falla mot ett betonggolv och lyssnar på klickarna från studsarna, som kommer allt tätare, eftersom kulan förlorar energi vid varje studs (bl.a. i form av ljud: "Det sa bara 'klick'!" (citat: HMCG)). Det låter som om kulan studsar oändligt tätt mot slutet, men att den slutar studsa efter en ändlig tid. För att undersöka fenomenet närmare släpper Svakar kulan från olika höjder h över golvet och observerar, att kulan studsar upp till höjden $p \cdot h$, där $p \in]0,1[$ och tycks vara oberoende av h.

a) (gymnasiefysik) Härled formeln för tiden t_0 det tar för kulan att falla till golvet från höjden h_0, om kulans massa är m, gravitationsaccelerationen är g, vi bortser för enkelhets skull från luftmotståndet och antar att kulan är punktformig.

b) (högskolematematik) Om vi idealiserar och tänker oss att kulan studsar oändligt många gånger mot golvet och att varje studs är momentan, hur lång sträcka kommer kulan totalt att röra sig innan den stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: rör den sig totalt en ändlig eller en oändlig sträcka?

c) (dito) Hur lång tid tar det innan kulan stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: tar det ändligt eller oändligt lång tid?

v.g. vänd

2a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n = \left(\frac{1}{1}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots = 1 + 4/9 + 27/125 + \ldots$ konvergerar och alltså har en summa S.

b) Visa att $S \in]1.5, 2.5[$, så $S = 2$, korrekt avrundat till närmaste heltal.

3a) 9.5.1 b) 9.5.3 c) 9.5.4 d) 9.5.8 i Adams.
Glöm inte att undersöka seriens uppförande i eventuella ändpunkter hos konvergensintervallet.

4a) Bestäm konvergensradien R hos potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n/(2n)! = 1 - x/2! + x^2/4! - x^3/6! + \ldots$

b) Bestäm någon övre och undre gräns för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n/(2n)! = 1 - 2/2! + 2^2/4! - 2^3/6! + \ldots$
Gränserna får vara grova, men skall vara motiverade.

c) Dito för talserien $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (-2)^n/(2n)! = 1 + 2/2! + 2^2/4! + \ldots$

Demo: 9.6.11. Mha. detta kan vi approximera talet $\ln y$ för $y > 0$ med godtyckligt litet fel med enbart papper och penna, om så behövs!

Fr: 1a) 9.5.23 b) 9.5.24 c) 9.5.28 d) 9.5.32 i Adams

2) Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-0.5}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är < 0.0005. (Fickräknaren ger att $e^{-0.5} \approx 0.60653066$. Använd gärna detta efteråt för kontroll.)

De övriga av fredagens hemtal behandlar Svakars sillfrukost, som delades ut tillsammans med kursinformationen. Se insidan av kursinfo-bladet.

Avgör vilka av Svakars kamrater som dricker ändligt mycket och vilka som dricker oändligt mycket. Bestäm också hur mycket de dricker, som dricker ändligt mycket och observera den sammanfattande frågan. Glöm inte att det också går att föreslå nya strategier närhelst man kommer på några sådana.

3a) Adam, Bertil, Caesar och David

b) Erik, Filip, Gustav och Harald

4a) Ivar, Johan, Kalle och Ludvig

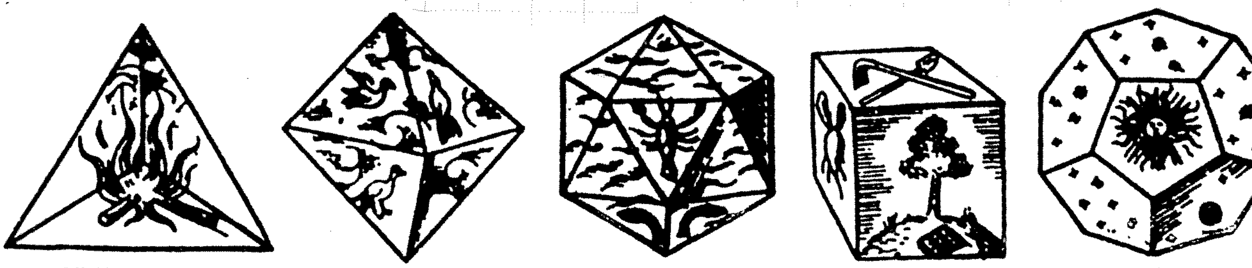
b) Martin, Olof, Petter och Qvintus.

Slutligen en <u>sammanfattande</u> fråga: Vem dricker mest av dem, som dricker ändligt mycket under sillfrukosten? Glöm därvid inte Niklas! Hur mycket han exakt dricker kan vi dock räkna ut först då vi gått igenom kap. 14.

Demo: 9.7.16 & 18 / 9.7.18 & 20 (uppl. 4 & 5 / uppl. 6).

Vi får fler metoder vid sidan av trapetsmetoden och Simpsons metod att approximera "omöjliga" integraler med godtyckligt hög noggrannhet. Denna typ av integraler dyker upp i kap. 11 i samband med <u>klotoiden</u> (se fig. 11.25, sid. 693/ /fig. 11.28, sid. 701 / fig. 11.28, sid. 636 i Adams, uppl. 4 / uppl. 5 / uppl. 6), en viktig kurva vid byggande av (järn-)vägar.

På baksidan kan vi beundra de platonska kropparna och Keplers (sedemera förkastade) modell av solsystemet.



TETRAHEDRON
Fire

OCTAHEDRON
Air

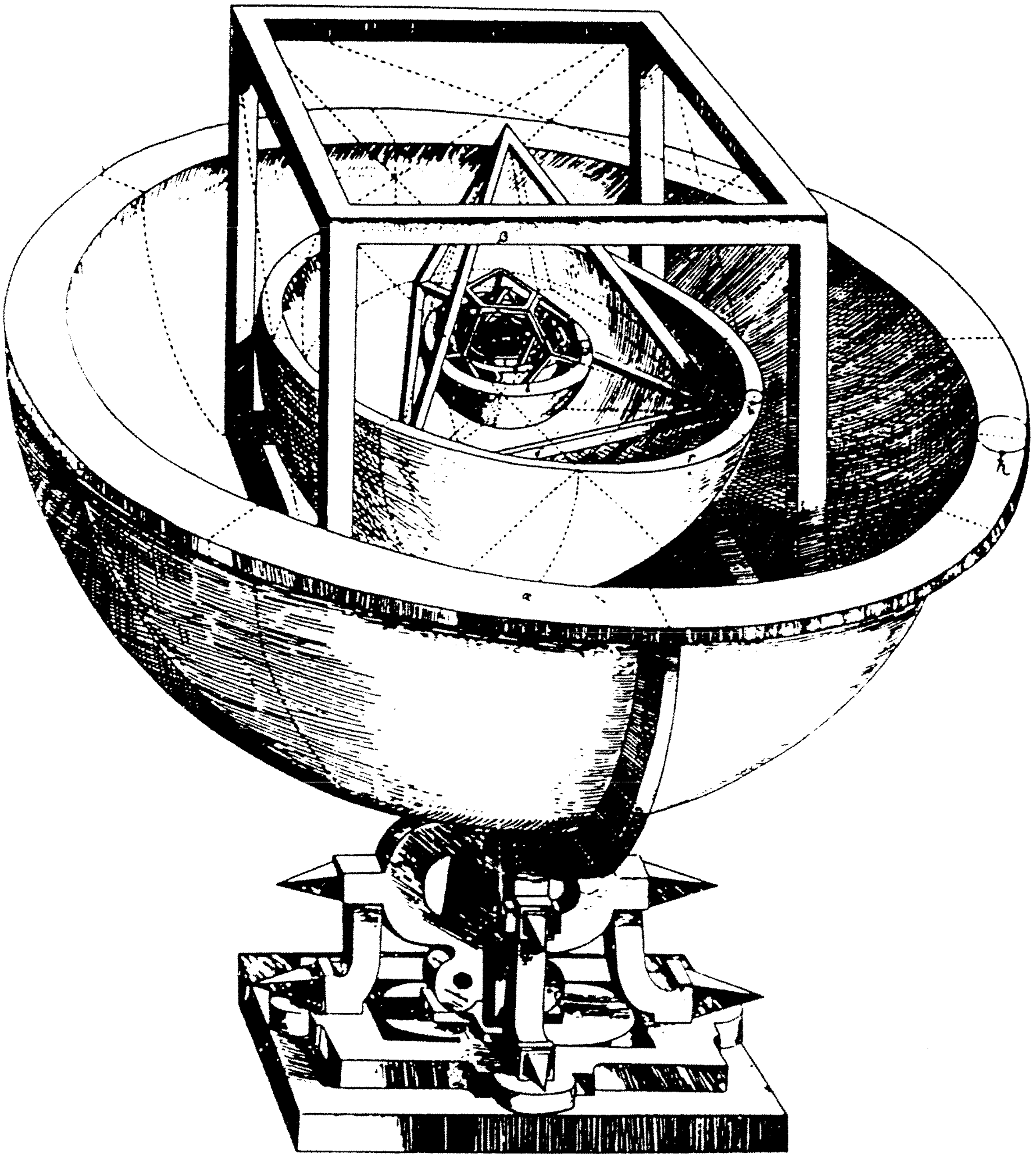
ICOSAHEDRON
Water

CUBE
Earth

DODECAHEDRON
The Universe

De platonska kropparna ovan ger vackra tillämpningar av gruppteorin. Tyvärr ledde de också kemin på villovägar ett par årtusenden med alkemi och guldmakeri som följd. Nedan finns en modell av solsystemet, som Kepler satte upp och som han senare förkastade, då mätningar visade att den inte stämde överens med verkligheten.

TABELLA III.
ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.
ILLVSTRISS°. PRINCIPI, AC DÑO, DÑO FRIDERICO, DVCI WIRTENBERGICO, ET TECCIO, COMITI MONTIS BELGARVM, ETC. CONSECRATA.



[illegible] An. M. D. XCVII.