Gk2 i Matematik, hemtal v4/07 Metsalo

På insidan av kursinformationsbladet finns Svakars sillfrukost med kompletterande material på baksidan. Den ger flera exempel på serier, som studeras i kap. 9. Var dock försiktiga med empiriska försök: divergens är fatalt! Det mesta i kap. 10.1–4 och 10.6 torde vara bekant från skolan resp. Gk1. Kontrollera detta och friska upp minnet m.h.a. uppgifterna i avsnitten.
I montrarna utanför matematik-biblioteket finns konen, den enmantlade hyperboloiden och den hyperboliska paraboloiden, som är 2:a-gradsytor, som ges av linjeskaror (exponaten 42 och 32; exponat 70 ges också av en linjeskara, men den är ingen 2:a-gradsyta). På insidan av detta blad finns de 9 icke-degenererade 2:a-gradsytorna sammanställda.

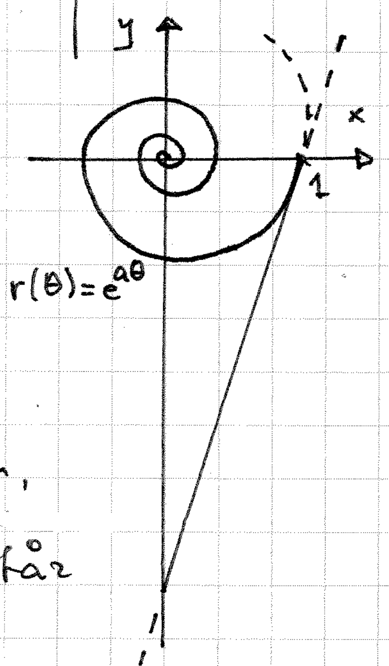
Ou: 1) Vi studerar kurvan $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$.

a) Skriv om ekvationen m.h.a. polära koordinater samt skissa kurvan.

b) Visa att kurvan ryms i en kvadrat med sidan 4.

c) Beräkna arean hos området innanför kurvan.

2) Kurvan $r(\theta)=e^{a\theta}$ kallas för en logaritmisk spiral (i spiralen i figuren är $a>0$). Linjen i figuren är spiralens tangentlinje i punkten $(1,0)$. Visa att den heldragna delen av spiralen (motsvarande $\theta \le 0$) har samma längd som den heldragna delen av tangentlinjen, som finns mellan koordinataxlarna.



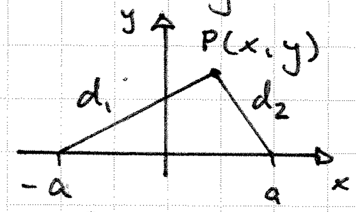
3a) Beräkna arean hos ytan som uppstår då kardioiden $r=a(1+\cos\theta)$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan. (Se även anmärkningen vid förra fredagens uppg. 4. Här måste man först sätta upp integralen. Utnyttja också den givna kontrollmöjligheten.)

Fortsättning på baksidan

4) <u>En utmaning</u>: Då $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ bestämmer ekvationen $x^2+y^2-2xy-4\sqrt{2}\gamma x = 0$ en parabel (olika parabler för olika värden på parametern γ). Alla dessa parabler har axeln vriden i förhållande till koordinataxlarna. Bestäm positionen för parabelns topp som en funktion av γ och visa att topparna hos parabelskaran ligger på en rät linje i xy-planet. Denna räta linje kan ges på parameterform: $(x,y)=(f(\gamma), g(\gamma))$ (där parametern γ är en lämplig parameter också för den kurvan (= linjen), som topparna hos parabelskaran bildar), men ge den också på formen $ax+by+c=0$.

Demo: För punkten $P(x,y)$ låter vi d_1 beteckna avståndet från P till punkten $(-a,0)$ och d_2 avståndet från P till $(a,0)$.



Vi studerar lemniskatan $C: d_1 \cdot d_2 = a^2$. Märk att origo $\in C$. Vi bestämmer kurvans ekvation, punkterna där den har horisontell eller vertikal tangent, arean innanför C samt arean hos ytan som uppstår då C roterar kring y-axeln.

Fr: 1a) 9.1.10 b) 9.1.27 i Adams
2a) 9.2.8 b) 9.2.10 c) 9.2.14 d) 9.2.20
3a) 9.3.2 b) 9.3.11
4a) 9.3.20 b) 9.3.26
Demo: 9.2.26–31