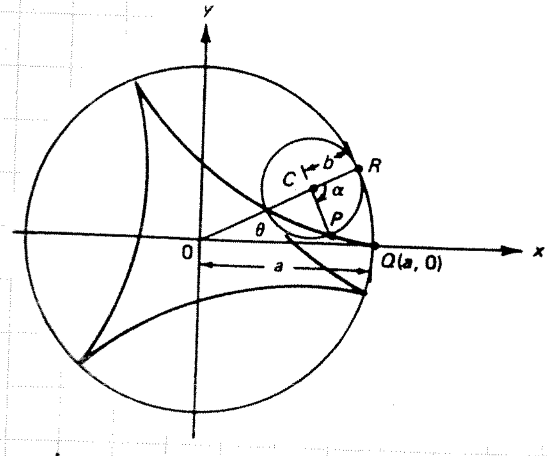
Gk 2 i Matematik, hemtal v3/07 Metsalo

Under den närmaste framtiden går vi igenom kap. 8–11 i Adams. Friska upp minnet genom att också studera kap. 8.1–3 i Kreyszig. På insidan av detta blad finns kägelsnitten på standardform. Ekvationer av typ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ger kägelsnitt och vi kan analysera dem fullständigt. Om vi i ekvationen för någon kurva i planet ersätter x med $x-x_0$ och y med $y-y_0$ motsvarar detta som bekant att vår kurva förskjuts med vektorn (x_0, y_0).

Öv:Demo: I ex. 8 i kap. 8.2 i Adams härleds cykloiden, som ritas av en punkt på periferin av en cirkel, då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln, cirkelns radie är b (a i ex. 8) och cirkeln rullar ovanpå x-axeln, får vi att cykloiden ges på parameterform av

$$(x,y) = (b(t-\sin t),\ b(1-\cos t)),\quad t\in\mathbb{R}$$

(se fig. 8.21, uppl. 4 / fig. 8.22, uppl. 5 / fig. 8.21, uppl. 6).
Vi kommer att härleda ekvationen för trokoiden, kurvan som ritas av en punkt på avståndet c från mittpunkten hos en cirkel med radien b, då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln och cirkeln rullar ovanpå den, blir ekvationen $(x,y)=(bt-c\sin t,\ b-c\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$ ($b=c$ ger cykloiden).



Om en cirkel med radien b rullar utan glidning innuti en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en hypocykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en hypotrokoid).
Om däremot en cirkel med radien b rullar utan glidning utanpå en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en epicykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en epitrokoid). Vi härleder ekvationen för dessa kurvor och visar, att asteroiden är en hypocykloid och att kardioiden (fig. 8.39/8.38/8.38) är en epicykloid.

(forts. på baksidan)

Rita gärna dessa kurvor mha. Matlab eller Mathematica som på datorövningarna i Gk1. Vidare kan det också vara intressant att rita några Lissajous-figurer (jmf. med uppg. 8.2.23–26). Pröva olika värden på m och n och titta vad som händer, om m och n har resp. saknar gemensamma faktorer. Pröva också att byta den ena eller bägge av funktionerna sin mot cos.

Fr: 1a) 8.1.2 b) 8.1.10 c) 8.1.12 i Adams

2) Vi studerar en ellips E och en hyperbel H i xy-planet. E:s toppar är H:s brännpunkter och H:s toppar är E:s brännpunkter. E:s ekvation är $x^2/5^2 + y^2/4^2 = 1$. Bestäm H:s ekvation samt ekvationen för dess asymptoter på formen $y = ax + b$.

3) Vi studerar kurvan $(x, y) = (\frac{t}{4}\cdot(t-9)(t-24),\ t(t-24))$.

a) Bestäm punkterna, där kurvan har horisontell eller vertikal tangent.

b) Kurvan skär sig själv i origo. Bestäm lutningen hos tangentlinjerna där.

c) Visa att origo är den enda punkten, där kurvan skär sig själv och skissa kurvan.

d) Beräkna arean hos öglan, som kurvan bildas. (Räknaren kan vara till en viss hjälp!)

4a) 8.4.9 b) 8.4.10a) c) 8.4.22 i Adams

Anmärkning: högskolematematik går inte ut på att lära sig att slå upp rätt formel i någon lärobok eller formelsamling! För b)- och c)-delen finns en <u>kontrollmöjlighet</u>: Om en kropp $\mathcal{D}$ har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så gäller att $\underline{A^3/V^2 \geq 36\pi}$ med likhet endast om kroppen är ett klot (och om ett plant område Ω har arean A och dess begränsningskurva har omkretsen O, så gäller att $\underline{O^2/A \geq 4\pi}$ med likhet endast om Ω är en cirkelskiva). Att visa detta ligger dock utanför kursen.

Demo: Vi analyserar kägelsnittet $4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24y = 0$. Pga. kresstermen $-4xy$ måste vi vrida koordinatsystemet innan vi kan komplettera kvadraterna och skriva kägelsnittet på standardform.