Gk2 i Matematik, hemtal v18/06 Metsalo

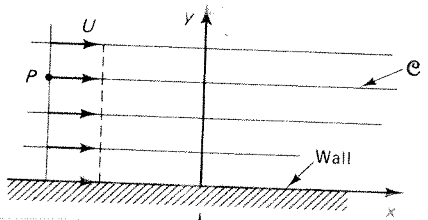
Detta är sista hemtalsomgången. 3:e mellanförhöret äger rum må 8.5. kl. 16–19 och omfattar kap. 14–16 samt appendix IV / kap. 17 (upplaga 5/upplaga 4) i Adams. Fr. 19.5. kl. 9–13 är det turbotentamen, då det går att antingen ta om ett mellanförhör (3h) eller skriva sluttentamen (4h). Sista föreläsningen är to. 4.5., sista räkneövningen fr. 5.5.

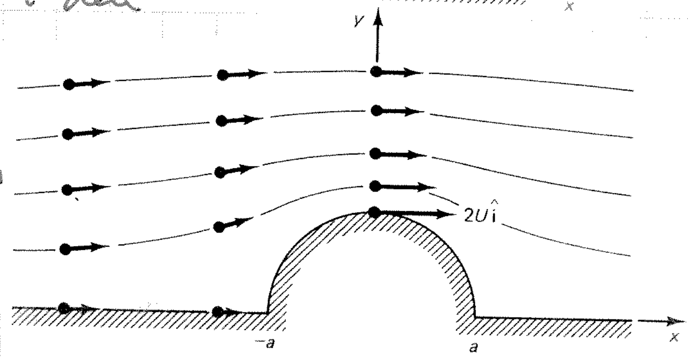
Ov: 1a) 16.4.20 b) 16.4.21

2) Uppg. 1, mellanförhör 3–05 (se insidan av hemtalsbladet till v13)

3) Uppg. 4, mellanförhör 3–03 (se baksidan av förra veckans hemtalsblad)

4) Om vi har en inkompressibel vätska, som strömmar i övre halvplanet $y > 0$, kan dess hastighetsfält ges av $\bar{v}(x,y) = U\hat{i}$ som i den övre figuren till höger.



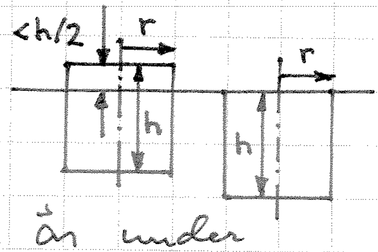


Om vi lägger en halvcirkulär vall i vätskans väg, som i den nedre figuren (figurerna stulna ur M.D. Greenberg: Advanced Engineering Mathematics), får vi hastighetsfältet $\bar{v}(x,y) = U\cdot\left(\hat{i} + \frac{a^2}{(x^2+y^2)^2}\left((y^2-x^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}\right)\right)$ för $x^2+y^2 > a^2$, $y > 0$.

a) Visa att $\bar{v}$ är parallell med vallen (dvs. ortogonal mot vallens normal) längs vallen och att $\bar{v} = \bar{0}$ endast i de två hörnen $(\pm a, 0)$.

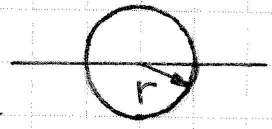
b) Visa att $\bar{v}$ är källfritt, dvs. att $\mathrm{div}(\bar{v}) = \nabla\bullet\bar{v} \equiv 0$.

Demo: a) Mha. Archimedes' princip från i fredags och 2:a ordn. linjära ODE från kap. 3.7 från Gk1 bestämmer vi svängningstiden hos en cylindrisk träkloss med $\delta_T > \delta_V/2$ (så mer än halva klossen är under vatten vid vila), om klossen trycks ned i vattnet och släpps, så den börjar guppa, om vi inte har någon dämpning (vilket är orealistiskt).



Forts. på insidan

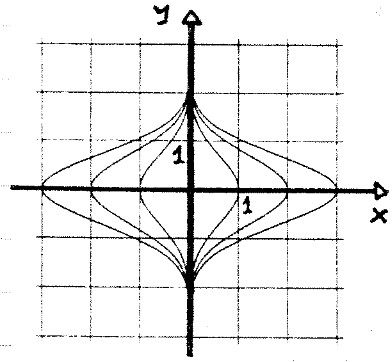
Ov: Demo: b) Vi bestämmer svängningstiden för små svängningar hos ett träklot med $\delta_T = \delta_V/2$, om det inte förekommer någon dämpning mha. Linearisering. Samma metod kan användas för att bestämma svängningstiden för små svängningar för allmänna kroppar också (om vi inte har någon dämpning).



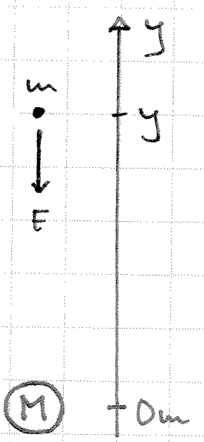
Fr: 1) Uppg. 3, mellanförhör 3-03 (se baksidan av förra veckans hemtalsblad)

2) En fallskärmshoppare med massan m hoppar utan begynnelsefart och påverkas vid sidan av tyngdkraften av en bromskraft proportionell mot fartens kvadrat. Detta ger differentialekvationen $ma = m\frac{dv}{dt} = F = mg - \alpha v^2$, där α är proportionalitetskonstanten. Bestäm $v(t)$ och $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

3) Vi studerar kurvskaran $x = Ce^{-(y^2)}$, $C \in \mathbb{R}$ (se skissen till höger). y-axeln ingår i kurvskaran och motsvarar $C=0$. x-axeln skär kurvskaran ortogonalt. Bestäm alla andra kurvor, som skär kurvskaran ortogonalt.



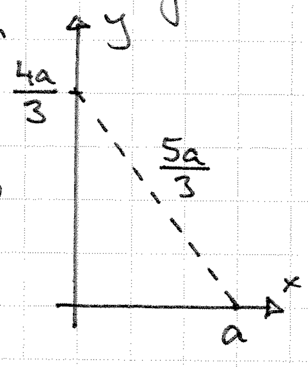
4) Ett föremål med massan m, som befinner sig på avståndet y från jordens mittpunkt, utsätts enligt Newtons gravitationslag och demo. för v13 för kraften $F = -GMm/y^2$, där G är universella gravitationskonstanten och M är jordens massa. På jordytan är $F = -mg = -GMm/R^2$, där R är jordens radie, så $GM = gR^2$.
Höjden $y(t)$ hos ett föremål, som skjuts upp från jordytan, satisfierar följaktligen differentialekvationen $my''(t) = -GMm/(y(t))^2$ eller $y''(t) = -gR^2/(y(t))^2$, om vi bortser från luftmotstånd, månens dragningskraft &c. Denna 2:a ordningens icke-linjära diff.ekvation har en lösning på formen $y(t) = a\,t^r$, där a och r är positiva konstanter och $r < 1$.



(forts.)

4) (forts.) Denna lösning svarar mot att föremålet flyger bort mot oändligheten (ty $r > 0$), men allt långsammare (ty $r < 1$). Bestäm a och r och visa att för att få denna lösning måste uppskjutningshastigheten vid jordytan (då $y = R$, vilket inte behöver svara mot $t = 0$ s; vi behöver inte starta vår klocka i uppskjutningsögonblicket) vara $y' = \sqrt{2gR} = \sqrt{2GM/R}$ (flykthastigheten).

Demo: (Uppgiften är stulen ur J. Pitkäranta: TKK:n Laaja Matematiikka 2) Vid tiden $t_0 = 0$ s börjar en hare springa från origo längs positiva y-axeln med den konstanta farten v. I samma ögonblick observeras harpalten av en uv i punkten $(a, 0)$. Uven kan flyga med farten $\frac{5}{4} \cdot v$, så om den vore säker på att haren fortsätter att springa upp längs y-axeln skulle den flyga mot punkten $(0, 4a/3)$ och komma dit samtidigt som haren. Uven vet dock av bitter erfarenhet, att ibland upptäcker haren den, så den flyger i stället så att alltid flyger i riktning mot haren.



Vi bestämmer kurvan, längs vilken uven flyger samt platsen för nedslaget, om harstackaren inte märker den annalkande faran utan fortsätter att intet ont anande springa längs y-axeln.

På baksidan finns fjolårets turbotentamen. Plocka fram förstoringsglaset. Ha en trevlig sommar och använd lovet förståndigt. Tack för det gångna läsåret! Georg

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan
Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

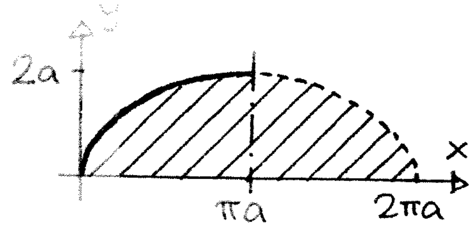
Turbotentamen 17.5.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

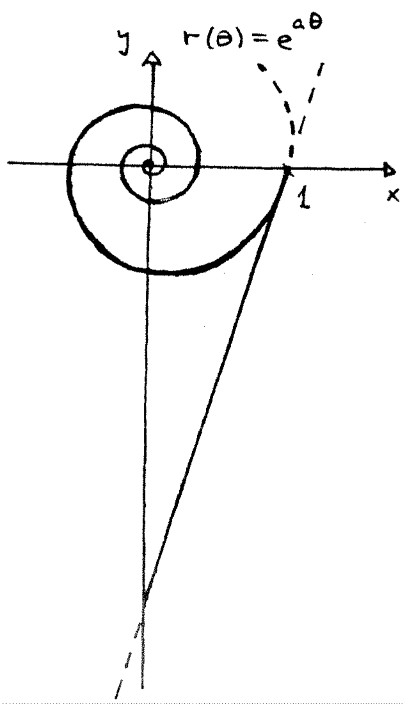
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 1, 3, 5, 7 och 10.

Vid denna turbotentamen får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. En halv båge av cykloiden ges på parameterform av $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), 0 \le t \le \pi, a > 0$ (se den övre figuren till höger). Då denna halva cykloidbåge roterar kring den vertikala linjen $x = \pi a$, uppstår en rotationssymmetrisk yta. Under denna yta finns en rotationssymmetrisk kropp, som påminner om gulan hos ett stekt ägg. (I figuren är kroppens tvärsnitt genom symmetriaxeln skuggat.) Vi vill beräkna volymen hos denna kropp. Sätt upp integralen, som ger denna volym på en sådan form, att den enkelt kan beräknas mha. t.ex. Mathematica. Själva volymen behöver inte beräknas. ($V \approx 38a^3$)

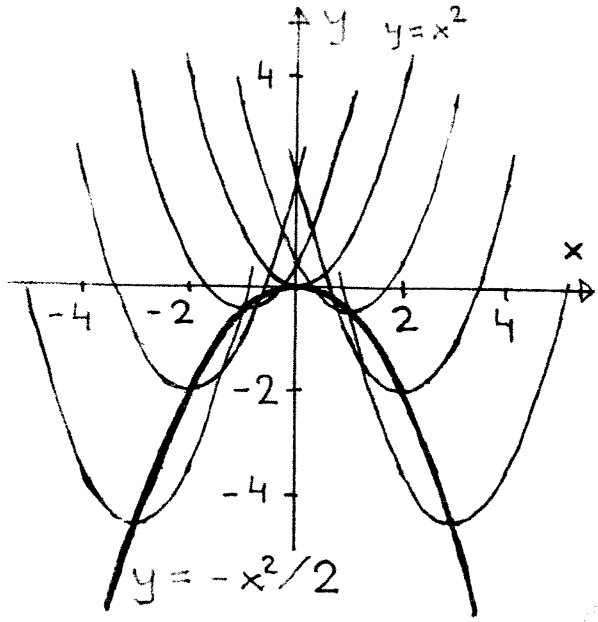


2. Kurvan i den nedre figuren till höger, som ges på polär form av $r(\theta) = e^{a\theta}$ (och på parameterform av t.ex. $x(\theta) = e^{a\theta}\cos\theta, y(\theta) = e^{a\theta}\sin\theta$) kallas för en *logaritmisk spiral*. Spiralen i figuren har $a > 0$. Linjen i figuren är spiralens tangentlinje i punkten $(1, 0)$. Visa att den heldragna delen av spiralen, som motsvarar $\theta \le 0$, har samma längd som den heldragna delen av tangentlinjen, som finns mellan koordinataxlarna.

3. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{6}} + \cdots$ konvergerar. (2p.)
b) Eftersom det rör sig om en konvergent positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa. Bestäm någon övre gräns för seriens summa. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad. (4p.)

Fortsättning på baksidan.

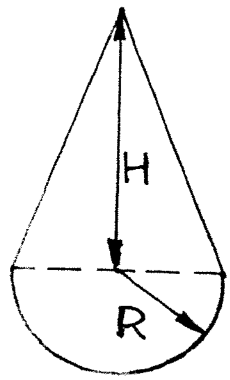
4. a) Vi befinner oss i punkten $(2, 1, 1)$ på skärningskurvan mellan de hyperboliska cylindrarna $3y^2 - z^2 = 2$ och $x^2 - z^2 = 3$ och rör oss längs denna skärningskurva i riktningen som (åtminstone i början) för oss längre bort från origo. Bestäm enhetsvektorn $\hat{u}$ i riktningen vi rör oss.
b) $h(x, y, z) = x^2y^3z^2$. Bestäm riktade derivatan $D_{\hat{u}}h$ av funktionen h i riktningen $\hat{u}$ från a)-delen i punkten $(2, 1, 1)$.



5. Bestäm maximala och minimala värdet hos funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ på ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$.

6. Vi studerar parabelskaran, som uppstår då parabeln $y = x^2$ parallellförskjuts så dess topp befinner sig på parabeln $y = -x^2/2$. Parabeln med toppen i $(c, -c^2/2)$ har då ekvationen $y-(-c^2/2) = (x-c)^2$, så parabelskarans ekvation är $f(x, y, c) = (x-c)^2 - (y+c^2/2) = 0$. Bestäm parabelskarans envelopp på formen $y = g(x)$.

7. Svakar tänker svarva en liten kloss av homogent trävirke åt sin lilla systerdotter. Den består av ett halvklot med radien R och ovanpå det en kon med höjden H. (I figuren till höger syns ett tvärsnitt genom klossens symmetriaxel.) Hur stor får H maximalt vara i förhållande till R för att klossen inte skall välta, då den står på halvklotet?



8. Funktionen $f(x, y, z) = \arctan(x/y) + \arctan(y/z) + \arctan(z/x)$ är definierad i första oktanten $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x, y, z > 0\}$. Visa att $\nabla \bullet (\nabla f) = div(grad(f)) = 0$ i hela f:s definitionsmängd.

9. Antag att D är ett begränsat område i $\mathbf{R}^3$, vars begränsningsyta ∂D är styckvis slät. Gauss' universalsats säger då att $\iint_{\partial D} \hat{N} dS(\ldots) = \iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots)$, där $\hat{N}$ är utåtriktade enhetsnormalen hos den slutna begränsningsytan ∂D och $(\ldots)$ kan vara Φ, $\bullet\vec{F}$ eller $\times\vec{F}$ för något skalärfält Φ eller vektorfält $\vec{F}$ av klass C^1 i $\mathbf{R}^3$.
a) Visa mha. Gauss' universalsats att $V = \frac{1}{3} \iint_{\partial D} (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \bullet \hat{N} dS$ ger volymen hos D.
b) Visa mha. Gauss' universalsats att om området D har volymen V, så ger
$\bar{r} = \frac{1}{2V} \iint_{\partial D} (x^2 + y^2 + z^2) \hat{N} dS$ positionsvektorn för tyngdpunkten hos området D.

10. Antag att $g(u, v)$ är av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$. Då är även $h(x, y)$ av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$. Visa att h är också harmonisk, dvs. att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 = 0$ i hela xy-planet.

Ha en riktigt trevlig sommar!
Georg M.