Gk2 i Matematik, hemtal v17/06 Metsalo

Detta är <u>näst sista hemtalsomgången</u>. Sista datorövn. äger rum to 27.4. (uppgifterna delas ut separat) och sista hemtalsomgången v18.
De, som önskar att denna kurs räknas som gamla Gk2 (Mat-1.452, 6sv), måste meddela mig detta, förslagsvis via e-post. Annars räknas kursen som nya Gk2 (Mat-1.1510, 10sp).

Ov: 1a) 16.1.10 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_r$)
b) 16.1.11 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_\theta$)

2) Låt $\bar{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vara en konstant vektor och $\bar{r}$ positionsvektorfältet $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Förenkla
a) $\nabla(\bar{u}\cdot\bar{r})$ b) $\nabla(\bar{r}\cdot\bar{r})$ c) $(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r}$ d) $\nabla\cdot(\bar{u}\times\bar{r})$ e) $\nabla\times(\bar{u}\times\bar{r})$ f) $(\bar{u}\times\nabla)\times\bar{r}$

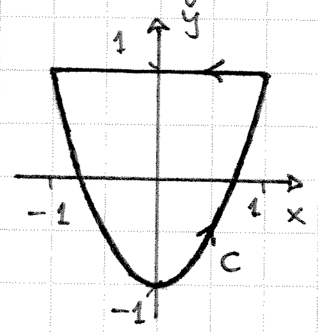
3) Ett vektorfält $\bar{F} = F_1(x,y,z)\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + F_3(x,y,z)\hat{k}$ av klass C^1 kallas <u>källfritt</u>, om $\nabla\cdot\bar{F} = div(\bar{F}) \equiv 0$ och <u>virvelfritt</u>, om $\nabla\times\bar{F} = rot(\bar{F}) = curl(\bar{F}) \equiv \bar{0}$.
a) Bestäm parametrarna α, β och γ så att vektorfältet $\bar{F} = (2x + z + e^y\sin(\alpha x))\hat{i} + (3y - e^y\cos(\alpha x))\hat{j} + (x + \beta y + \gamma z)\hat{k}$ är såväl källfritt som virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.
b) Virvelfriheten i $\mathbb{R}^3$ medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) skalär potential Φ sådan att $\bar{F} = \nabla\Phi = grad(\Phi)$. Bestäm en sådan skalär potential.
c) Källfriheten i $\mathbb{R}^3$ medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) vektorpotential $\bar{G}$ sådan att $\bar{F} = \nabla\times\bar{G} = rot(\bar{G}) = curl(\bar{G})$. Använd metoderna i ex 1 kap. 16.2 till att bestämma en sådan vektorpotential. (Här har vi mera valfrihet än i b)-delen: vi kan ostraffat välja $\hat{i}$-, $\hat{j}$- eller $\hat{k}$-komponenten i $\bar{G}$ till att vara $\equiv 0$. I exemplet valdes $\hat{j}$-komponenten $\equiv 0$.)

4a) Visa att om φ och ψ är skalärfält av klass C^2, så är $\nabla\times(\varphi\cdot\nabla\psi) = \nabla\varphi\times\nabla\psi = -\nabla\times(\psi\cdot\nabla\varphi)$
b) Antag att vektorfälten $\bar{F}$ och $\bar{G}$ har skalära potentialer φ resp. ψ av klass C^2. Bestäm m.h.a. a)-delen en vektorpotential till vektorfältet $\bar{F}\times\bar{G}$.

Demot och fredagens hemtal på insidan.

Demo: Utanför en punktmassa M finns ett gravitationsaccelerationsfält $\bar{a}(\bar{r}) = -\frac{GM}{|\bar{r}|^3}\cdot\bar{r}$, som i figuren vid förra fredagens demo, där origo är i M och G är den universella gravitationskonstanten ($G \approx 6.670\cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$).
Demo fr v13 ger att vi får samma gravitationsaccelerationsfält utanför ett homogent sfäriskt skal och utgående från detta får vi att gravitationsaccelerationsfältet är detsamma också utanför en sfäriskt symmetrisk kropp.
Utgående från detta och mha. divergenssatsen (Gauss' sats) och resultatet från förra fredagens demo visar vi att gravitationsaccelerationsfältets flöde in genom en sluten, orienterbar yta är direkt proportionell mot massan inuti ytan.

Fr: 1) Beräkna kurvintegralen $\oint_C \bar{F}\bullet d\bar{r}$ där $\bar{F}(x,y) = 2x\hat{i} + xy\hat{j}$ och C är den slutna kurvan som går från $(1,1)$ till $(-1,1)$ längs linjen $y=1$ och därefter tillbaka till $(1,1)$ längs parabeln $y = 2x^2 - 1$



a) direkt som en kurvintegral
b) genom att omvandla den till en ytintegral mha. Greens sats.

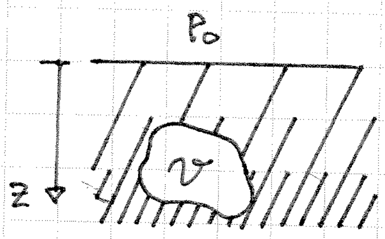
2) Beräkna flödet $\oint\!\!\oint_S (\bar{F}\bullet\hat{N})\,dS$ av vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = \hat{i} + y\hat{j} + z^2\hat{k}$ ut genom sfären $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\}$
a) direkt som en ytintegral
b) genom att omvandla den till en volymintegral mha. Gauss' sats (divergenssatsen).

3) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial S} \bar{v}\bullet d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} + 3x\hat{k}$ längs randkurvan ∂S av halvsfären $S: x^2+y^2+z^2 = 16,\ z\geq 0$
a) direkt som en kurvintegral
b) genom att omvandla den till en ytintegral mha. Stokes' sats.

4) Denna uppgift är ett specialfall av uppg. 8C7 på sid. 517 i Adams:
Från demo fr v13 får vi också tyngdkraftsaccelerationen inuti ett homogent klot. (forts.)

4) (forts.) Antag att jorden är homogen och borra ett hål längs axeln, i vilket vi släpper ned ett föremål med massan m. Beräkna ur 2:a ordningens linjära ODE från kap. 3.7 från Gk1 hur lång tid det tar innan föremålet återvänder, om vi bortser från luftmotstånd, Coriolis-kraft, olidlig hetta o.d.

Demo: I en vätska med den variabla densiteten $\delta(z)$ (som förmodligen ökar med djupet z) ges trycket på djupet z av
$$p(z) = p_0 + \int_0^z g\,\rho(\zeta)\,d\zeta,$$
där p_0 är lufttrycket och g är tyngdkraftsaccelerationen.



Om en kropp V nedsänkes i vätskan, kommer vätsketrycket att påverka kroppen med en kraft. M.h.a. Gauss' universalsats (vektorversionen av divergenssatsen) härleder vi

<u>Archimedes' princip:</u> Lyftkraften, varmed en vätska påverkar en i den nedsänkt kropp är lika med den undanträngda vätskans tyngd.

I kap. 16.6 och bland övningsuppgifterna visas det hur flera lagar inom bl.a. fysiken följer ur div. matematiska satser, främst integralsatserna. Där skördas på sätt och vis frukterna av vårens arbete. Studera kapitlet ingående!

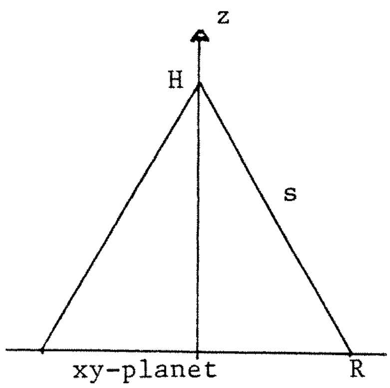
På baksidan finns mellanförhör 3 från år 2003.

Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, **Metsalo**
Mellanförhör nr 3, 2003-05-05

Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TIK, TLT, TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1a) Konen $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,$ $0 \leq z \leq f(x,y) = H(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}/R)\}$ (skissad till höger) har som bekant volymen $V = \frac{\pi}{3}\cdot R^2H$. I punkten $(x,y,z) \in D$ är dess densitet $\delta(x,y,z) = \delta_1\cdot(x^2+y^2)/R^2$, så densiteten är 0 längs symmetriaxeln (z-axeln) och δ_1 längs bottenytans randkurva. Beräkna konens massa m och visa att dess genomsnittliga densitet $\bar{\delta} = m/V$ är $3\delta_1/10$.



b) Konens tyngdpunkt finns av symmetriskäl på z-axeln (symmetriaxeln). Visa att tyngdpunkten är $\bar{z} = H/6$.

Gott råd: På grund av kroppens form kan cylindriska koordinater vara bra.

2. Konytan $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ z = f(x,y) = H(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}/R)\}$ (den övre begränsningsytan till konen i föregående uppgift) har som bekant arean $A = \pi Rs = \pi R(R^2+H^2)^{\frac{1}{2}}$. I punkten $(x,y,z) \in S$ är dess area-densitet $\delta(x,y,z) = \delta_2\cdot(x^2+y^2)/R^2$, så area-densiteten är 0 högst upp i konytans spets och δ_2 längst ner vid dess randkurva. Beräkna konytans massa m och visa att dess genomsnittliga area-densitet $\bar{\delta} = m/A$ är $\delta_2/2$.

3a) Bestäm funktionen y(x) som satisfierar differential-ekvationen $y'(x) = 2x\cdot e^{-y(x)}$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

b) Bestäm funktionen y(x) som satisfierar differential-ekvationen $y'(x) = 2y(x)+e^{-x}$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

Gott råd: Här är det enkelt att kontrollera, om svaret är korrekt.

4. Funktionen $f(t) = e^t$ satisfierar $f'=f$ och funktionen $g(t) = e^{-t}$ satisfierar $g''=g\neq g'$. Nu letar vi efter vektorfält med analoga egenskaper.

a) Bestäm ett vektorfält $\bar{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\bar{i}+F_2(x,y,z)\bar{j}+F_3(x,y,z)\bar{k} \neq \bar{0}$ (nollvektorfältet) sådant att $\nabla\times\bar{F} = \mathrm{rot}(\bar{F}) = \mathrm{curl}(\bar{F}) = \bar{F}$.

b) Bestäm ett vektorfält $\bar{G}(x,y,z) = G_1(x,y,z)\bar{i}+G_2(x,y,z)\bar{j}+G_3(x,y,z)\bar{k} \neq \bar{0}$ (nollvektorfältet) sådant att $\nabla(\nabla\cdot\bar{G}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\bar{G})) = \bar{G}$.

Goda råd: Eftersom det räcker med ett exempel i vardera deluppgiften kan man göra förenklande ansatser att t.ex. någon komponentfunktion bara beror på en enda variabel eller är identiskt lika med noll. (Går det, så går det!) Vidare är det även här enkelt att kontrollera, om svaret är korrekt.