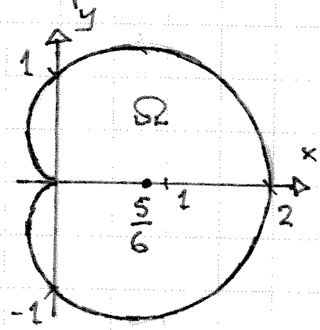
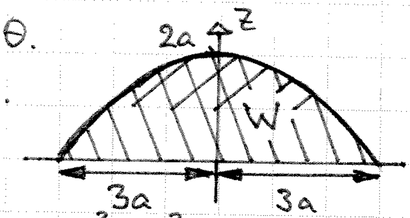
Gk2 i Matematik, hemtal v14/06 Metsalo

På insidan finns en del integralsatser från kap. 16 och första bladet (extra-pärmen) i Adams sammanfattade.

Ov: 1) Bestäm tyngdpunkten hos det plana området $\mathcal{D}$ med den variabla densiteten i uppg. 1, ov v13. Observera symmetrin hos problemet.

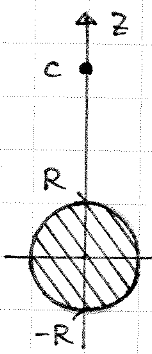


2) Det plana området Ω till höger är homogent (konstant areadensitet) och begränsas av kardioiden $r = 1 + \cos\theta$. Visa att dess tyngdpunkt är $(\frac{5}{6}, 0)$. Använd lämpligast polära koord.

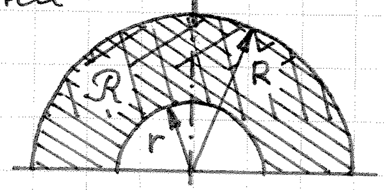


3) Kroppen W begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z = 2a\cdot\left(1 - \frac{x^2+y^2}{(3a)^2}\right)$ (se ovan). I punkten $(x,y,z) \in W$ är kroppens densitet $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. Dess tyngdpunkt finns då av symmetriskäl på z-axeln. Visa att tyngdpunkten är $\bar{z} = a$.

4) En punkt befinner sig på avståndet $c > R$ från mittpunkten hos ett klot med radien R. Visa att punktens genomsnittliga avstånd från klotet är $c + R^2/5c$. Använd lämpl. sfäriska koord. som i figuren till höger.

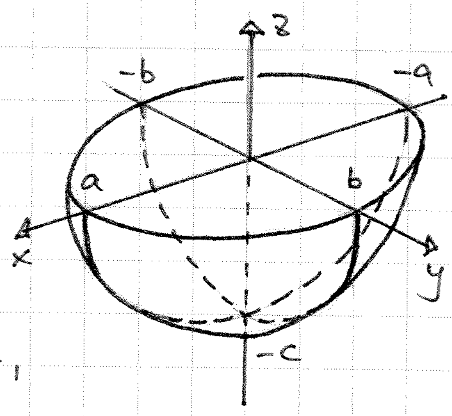


Demo: Halvklotet $\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$ har i punkten $(x,y,z) \in \mathcal{R}$ densiteten $\delta(x,y,z) = \delta_0 z/R$. I halvklotet görs en halvklotsformad urgröpning så att de två halvkloten har samma mittpunkt. Urgröpningens radie r väljs så att kroppens tyngdpunkt ligger på urgröpningens yta. Vi bestämmer förhållandet r/R. (Trots att densiteten är enklast i cylindriska koord. är det lämpligare att använda sfäriska koord. pga. kroppens form.)

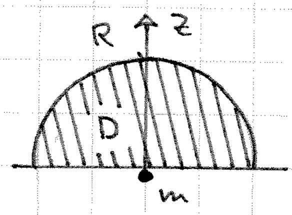


Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1) Halvellipsoiden $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ z \le 0\}$ har $a \ge b > 0 < c$. Bestäm dess tyngdpunkt. Avgör också hur stor c maximalt får vara i förhållande till b för att halvellipsoiden skall stå på sin krökta yta. Se även uppg. 1, on v7.

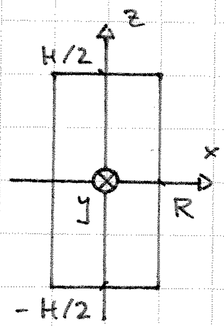


2a) Bestäm tyngdpunkten hos det homogena halvklotet D i figuren t.h. med densiteten δ_0 och radien R.



b) Beräkna gravitationskraften varmed halvklotet påverkar en punktmassa m i klotets mittpunkt (se fig.), analogt med förra fredagens demo. Observera, att vi _inte_ skulle få samma kraft, om vi skulle koncentrera hela halvklotets massa till dess tyngdpunkt.

3) Vi har en homogen rät cirkulär cylinder med höjden H, radien R och densiteten δ_0. Bestäm dess tröghetsmoment map.



a) symmetriaxeln (z-axeln i figuren)

b) en axel genom mittpunkten $\perp$ symmetriaxeln (t.ex. x- eller y-axeln i fig.)

4) En partikel med massan m (kg), som rör sig med farten v (m/s), har som bekant kinetiska energin $E = mv^2/2$. En partikel med massan m, som befinner sig på avståndet r (m) från en axel och roterar kring axeln med vinkelhastigheten ω (1/s), har farten $r\omega$ och följaktligen kinetiska energin $E = m(r\omega)^2/2$.
Visa utgående från detta att ett homogent klot med radien R (m) och densiteten δ (kg/m^3), som roterar med vinkelhastigheten ω kring en diameter har totala kinetiska energin $E = 4\pi\delta R^5\omega^2/15$.

Demo: Vi visar att om vi har ett rutat golv, där kvadraterna har sidan a och tappar tandpetare med längden a på golvet, så är sannolikheten att en tandpetare skär minst en skarv (horisontell eller vertikal) $P = 3/\pi$.

Integralsatserna i kap. 16.3–5 och på första uppslaget, något omformulerade (märk att satserna gäller under förutsättningen att diverse krav är uppfyllda):

1) $H'(t) = h(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} h(t) = H(t_1) - H(t_0)$.

$\int_{t_0}^{t_1} H'(t)\,dt = H(t_1) - H(t_0)$ IKFS

2) $\nabla \Phi = \bar{F} \Rightarrow \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$, om kurvan C går från punkten P_0 till P_1.

$\int_C (\nabla \Phi) \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$

3) $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (P\,dx + Q\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{k}\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

4) $\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (-Q\,dx + P\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla \bullet \bar{F})\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet \hat{N}\,ds$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

Greens satser i planet är i grund och botten en och samma sats men i rummet generaliseras de till två helt olika satser:

5) $\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{N}\,dS = \oint_{\partial S} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ Stokes' sats i $\mathbb{R}^3$

6) $\iiint_D (\nabla \bullet \bar{F})\,dV = \oiint_{\partial D} \bar{F} \bullet \hat{N}\,dS$ Gauss' sats i $\mathbb{R}^3$

7) Stokes' universalsats: $\oint_{\partial S} d\bar{r}(\ldots) = \iint_S (\hat{N}\,dS \times \nabla)(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

8) Gauss' universalsats: $\oiint_{\partial D} \hat{N}\,dS(\ldots) = \iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.