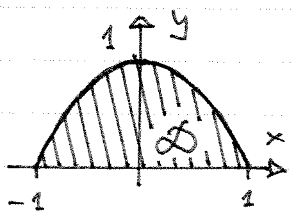
Gk2 i Matematik, hemtal v13/06 Metsalo

Öv: 1a) Det plana området $\mathcal{D}$ begränsas av x-axeln och parabeln $y = 1 - x^2$ och har i punkten (x, y) areadensiteten $\delta(x, y) = x^4 + y$. I vilken punkt är densiteten högst?



b) Bestäm $\mathcal{D}$:s area, massa och medeldensitet.

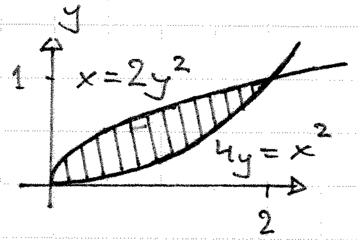
2) Beräkna dubbelintegralen $I = \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sqrt{16 - y^4}\, dy \right) dx$ genom att byta integrationsordning.

3) Beräkna volymen hos kroppen som begränsas av planen $y = 0$ och $y = x$ samt den paraboliska cylindern $x + z^2 = 2$.

4) Beräkna volymen hos kroppen som finns innanför de tre räta cirkulära cylindrarna $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + x^2 = a^2$. Observera att kroppen inte är ett klot. Goda råd: utnyttja symmetrin och friska upp integrationskunskaperna från Gk 1.

Demo: Vi beräknar exakta värdet hos $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ mha. dubbelintegraler. (Integralkriteriet i kap. 9.3 gav att serien konvergerar och dessutom ett intervall för dess summa.)

Fr: 1) Beräkna volymen och massan hos kroppen, vars projektion på xy-planet är det skuggade området till höger, som begränsas upptill av planet $z = 2$ och nedtill av den paraboliska cylindern $z = y^2$ och som i punkten (x, y, z) har densiteten $\delta(x, y, z) = 2x$.



2a) Beräkna trippelintegralen $\int_0^1 \left(\int_{2x}^2 \left(\int_{2y}^4 x\, dz \right) dy \right) dx$

b) Ändra integrationsordningen till $\int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? x\, dy \right) dx \right) dz$ resp. $\int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? x\, dx \right) dz \right) dy$. Bestäm de nya integrationsgränserna och kontrollera genom att beräkna de nya integralerna.

Fortsättning på baksidan. På insidan finns de senaste två årens mellanförhör 3.

3) Klotet $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ har mittpunkten i origo och radien R (enhet: m). I punkten $(x,y,z) \in B$ är dess densitet $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot (x^2+y^2+z^2)/R^2$, så densiteten är $0\ kg/m^3$ i mittpunkten och δ_0 (enhet: kg/m^3) i klotets periferi. Beräkna klotets massa med hjälp av

a) sfäriska koordinater

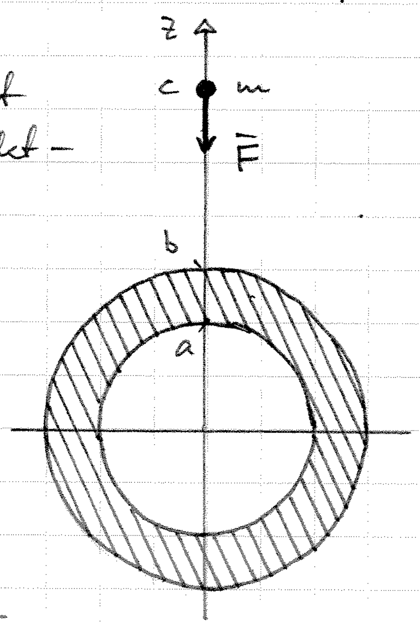
b) cylindriska koordinater.

4) Vi studerar ytorna i ex. 5, kap. 14.4, sid 860-1/ /841-2 (uppl. 5/uppl. 4) (figuren har bara en fjärdedel av ytorna). Deras skärningskurva är Vivianis kurva, bekant sedan tidigare.

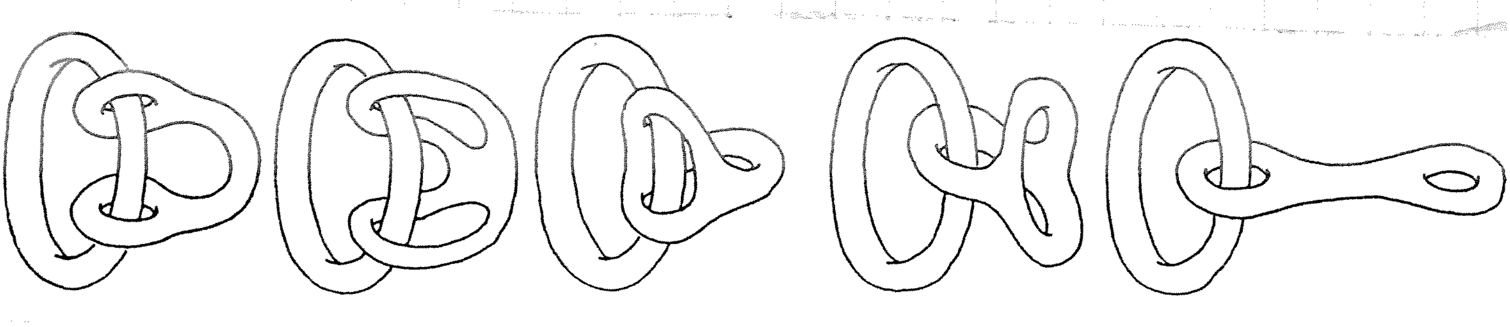
a) Beräkna arean hos den delen av den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2 = 2ay$, som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$

b) Beräkna arean hos den delen av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, som ligger innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2 = 2ay$ (ytan kallas för Vivianis fönster). Gott råd: använd gärna polära koordinater.

Demo: Vi bestämmer gravitationskraften, med vilken ett homogent sfäriskt skal påverkar en punktmassa m utanför (eller inuti) detta skal, analogt med exemplet på sid. 885/866-7. Utan extra arbete får vi även kraften, om m befinner sig i själva skalet (i motsats till att den befinner sig i hålrummet).



Slutligen lite topologi: Finn felet i bildsekvensen nedan.



Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

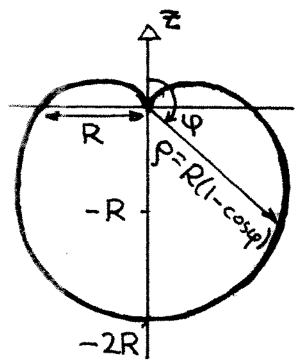
Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr. 3, 25.4.2005

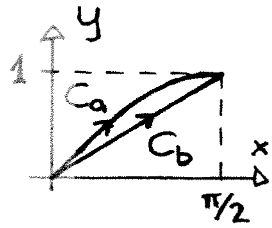
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

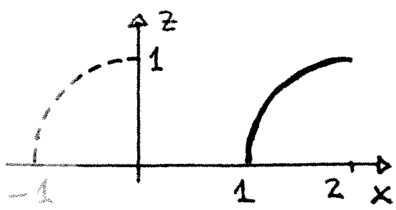
1. Om $f(t)$ och $g(t)$ är reellvärda funktioner av klass C^1, definierade i $\mathbf{R}$, så gäller som bekant att $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$. Låt nu $\Phi(x, y, z)$ vara ett skalärfält och $\vec{G}(x, y, z) = G_1(x, y, z)\vec{\imath} + G_2(x, y, z)\vec{\jmath} + G_3(x, y, z)\vec{k}$ ett vektorfält av klass C^1, definierade i $\mathbf{R}^3$. Visa följande analogi till deriveringsformeln ovan: $\nabla \bullet (\Phi \cdot \vec{G}) = (\nabla\Phi) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (\nabla \bullet \vec{G})$, dvs. $div(\Phi \cdot \vec{G}) = (grad(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (div(\vec{G}))$.



2. Vi studerar den äppelformade kroppen, som begränsas av rotationskardioiden $\rho = R(1 - \cos\varphi)$, uttryckt i sfäriska koordinater. I den övre figuren till höger syns ett tvärsnitt av kroppen genom z-axeln, som är dess rotationsaxel. På avståndet ρ från origo har kroppen densiteten $\delta(\rho, \varphi, \theta) = \delta_0\rho/R$. Beräkna kroppens massa.

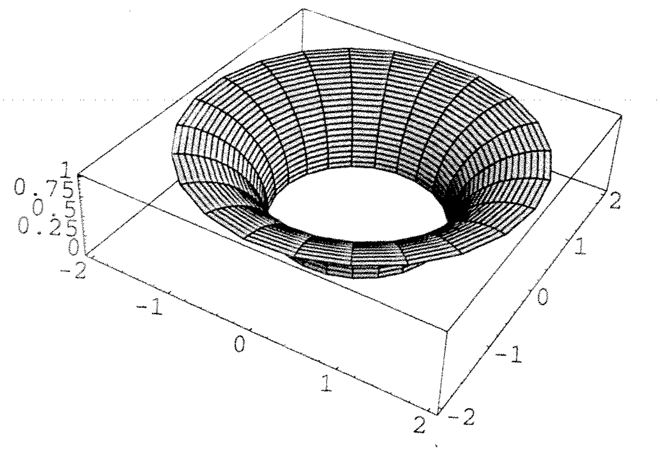


3. $\vec{F}(x, y) = \pi \sin x\vec{\imath} + (2\pi \sin x - 4x - 7y)\vec{\jmath}$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då C går från origo till punkten $(\pi/2, 1)$
a) längs kurvan $y = \sin x$, b) rätlinjigt.



4. Den streckade kvartscirkeln i xz-planet kan ges på parameterform som $x(v) = \cos v, z(v) = \sin v, v \in [\pi/2, \pi]$. Den heldragna kvartscirkeln kan därför ges som $x(v) = 2 + \cos v, z(v) = \sin v, v \in [\pi/2, \pi]$. Om vi låter den heldragna kvartscirkeln rotera kring z-axeln, uppstår den rotationssymmetriska ytan $\mathcal{S}$ i den nedre figuren. Denna yta $\mathcal{S}$ kan ges på parameterform som $\vec{r}(\theta, v) = (2 + \cos v)\cos\theta\vec{\imath} + (2 + \cos v)\sin\theta\vec{\jmath} + \sin v\vec{k}, \theta \in [0, 2\pi], v \in [\pi/2, \pi]$. Av symmetriskäl finns naturligtvis tyngdpunkten för ytan $\mathcal{S}$ på z-axeln. Använd *den givna parameterframställningen* för att bestämma tyngdpunktens z-koordinat

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z \cdot dS}{\iint_S dS}$$



Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

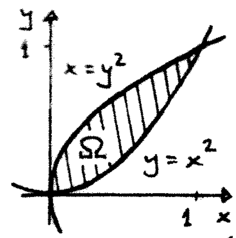
Metsalo

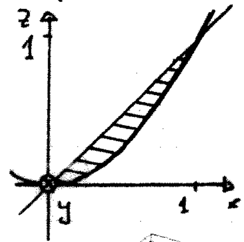
Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

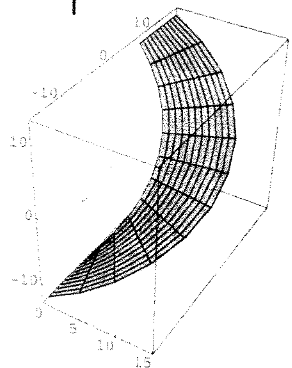
Mellanförhör nr 3 26.4.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
På förekommen anledning varnas för oavsiktliga tryckfel i texten.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!







1. Det plana området Ω i den övre figuren begränsas av parablerna $x = y^2$ och $y = x^2$. Ω är alltså symmetrisk kring linjen $y = x$ och dess area är naturligtvis $1/3$. I punkten (x, y) har Ω area-densiteten $\delta(x, y) = 5x+6y^2$. Visa att trots att area-densiteten inte är symmetrisk kring linjen $y = x$, så är Ω:s tyngdpunkt (masscentrum) ändå på denna linje.

2. Då parabeln $z = x^2$ roterar kring z-axeln, uppstår rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$. Visa att kroppen som begränsas av rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = x$ har volymen $\pi/32$. (I figuren i mitten syns kroppens projektion på xz-planet. Studera kroppens projektion på xy-planet och använd gärna polära/cylindriska koordinater.)

3. $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k} = u\cos(v)\vec{\imath} + u\sin(v)\vec{\jmath} + 8v\vec{k}$, $6 \le u \le 15, -\pi/2 \le v \le \pi/2$ ger en yta på parameterform, nämligen helicoiden (spiralrampen) i den nedre figuren (ritad med Mathematica). Bestäm dess area. (Svar: arean ≈ 376.)

4. $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, dvs. *nabla* (eller *del*, som den också kallas), är inte en vektor i vanlig bemärkelse, trots att den har en $\vec{\imath}$-"komponent", en $\vec{\jmath}$-"komponent" och en $\vec{k}$-"komponent". Det är en *differentieringsoperator*, så räkneregler som gäller för vanliga vektorer behöver inte gälla för ∇.
a) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{b} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Ge ett exempel på ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z)$ av klass C^1 i $\mathbf{R}^3$ sådant att $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \bullet (rot(\vec{F})) = \vec{F} \bullet (curl(\vec{F})) \not\equiv 0$ (inte identiskt lika med 0; det gör inget om $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = 0$ i somliga punkter). Beräkna också $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F})$ i någon punkt, där $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) \neq 0$.
b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{a} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Visa att för alla vektorfält $\vec{G}(x, y, z)$ av klass C^2 i $\mathbf{R}^3$ gäller att $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{G}) = div(rot(\vec{G})) = div(curl(\vec{G})) \equiv 0$ (identiskt lika med 0). Ibland kan alltså en räkneregel, som gäller för vanliga vektorer, *till synes* ha en motsvarighet för ∇.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2,$
$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots,$
$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C.$

Efter mellanförhöret finns lösningsskisser för påseende utanför rum U337b. Ha en minnesrik Valborgmässohelg (försök åtminstone att minnas något!) och en riktigt trevlig sommar! Georg