Gk2 i Matematik, hemtal v12/06 Mettsalo

Måndagen 27.3. har vi <u>2:a mellanförhöret</u>, som omfattar kap. 12 och 13 i Adams med undantag för kap. 13.7 i uppl. 5 (som saknar motsvarighet i uppl. 4). Samma regler gäller som för 1:a mellanförhöret. Tänk på att det kan vara svårt att läsa på inför ett mellanförhör och fira årsfest samma helg. Men man kan läsa på långt före sista helgen också!

Torsdagen 23.3. har vi <u>2:a datorövningen</u>. Uppgifterna kommer att delas ut separat.

Efter kap. 13 fortsätter vi med kap. 14–16.

Nedan beskrivs <u>Newtons metod</u> för att finna gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta. Detta är en utvidgning av kap. 13.6 i Adams, där man arbetar med 2 ekv. och 2 obek. Räkningarna utförs med datorer.

<u>Newtons metod för n ekvationer med n variabler:</u>

Om $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är n st. funktioner av n variabler (som vi tänker oss bildar en n-kolumnvektor) och vi söker en lösning till

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(ett ekvationssystem med n ekvationer och n obekanta)

kan iterationsschemat

$$\bar{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{m+1} = \bar{x}_m - \left(J(\bar{x}_m) \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix} =$$

Matris-invertering

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix}$$

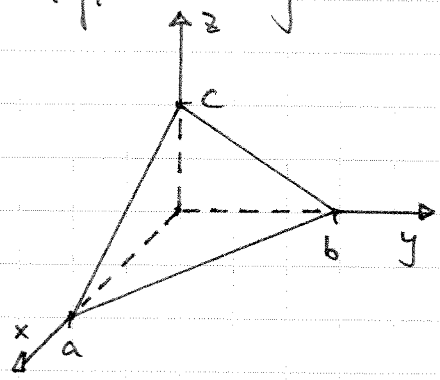
med lämpligt begynnelsevärde $\bar{x}_0$ (en n-kolumnvektor) konvergera till ett gemensamt nollställe för de n st. funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Precis som i fallet med 1 ekvation med 1 variabel kan Newtons metod också divergera. Konvergens förutsätter bra begynnelsevärden, men om Newtons metod konvergerar, tenderar den att konvergera snabbt.

Öv: 1) En excentrisk miljonär låter bygga en elliptisk simbassäng, vars rand ges av $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$ och som i punkten (x,y) har djupet $f(x,y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm de punkter, där djupet i bassängen är störst resp. minst samt djupet i dessa punkter.

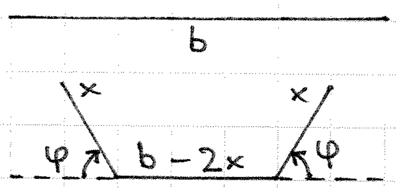
2a) Maximera och minimera $f(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$

b) Maximera och minimera $f(x,y,z) = xyz$ under bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$ och $h(x,y,z) = x - y = 0$.

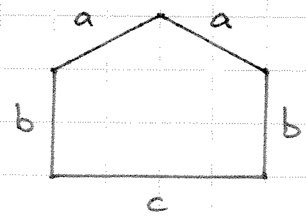


3a) Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern i figuren till höger så att tre av rätblockets sidor sammanfaller med koordinatplanen.

b) Ur ett klot med radien R sågas ett rätblock. Visa att av alla möjliga rätblock har kuben med klotets diameter som rymddiagonal största sammanlagda arean hos begränsningsytorna.



4) Långa plåtremsor av bredd b viks till stuprännor genom att remsornas kanter med en bredd x viks upp vinkeln φ symmetriskt som i figuren ovan. Vilka värden på x och φ maximerar stuprännornas tvärsnittsarea?

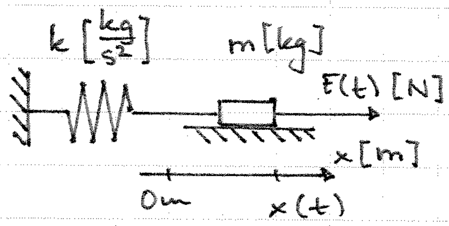


Demo: Svakar tänker installera ett vindsfönster. Fönstret skall ha formen av en likbent triangel ovanför en rektangel som i fig. t.h. Eftersom Svakar har en tätningslist av längd L, får fönstrets omkrets inte överskrida L. Vi bestämmer hur fönstret skall dimensioneras för att dess area skall maximeras. (Av alla rektanglar med en given omkrets har kvadraten den största arean och av alla trianglar med en given omkrets har den liksidiga triangeln den största arean.)

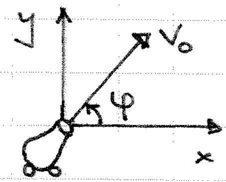
Fr: 1) 13.4.20 Denna typ av problem dyker också upp i Gk3 i Fourier-analysen.

2) Visa att funktionen

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \int_{0s}^{t} F(\tau)\cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot(t-\tau)\right)\cdot d\tau$



satisfierar den ordinära differentialekvationen (ODE) $m\cdot x''(t) + k\cdot x(t) = F(t)$ med begynnelsevillkoren $x(0s)=0m$, $x'(0s)=0\,m/s$.

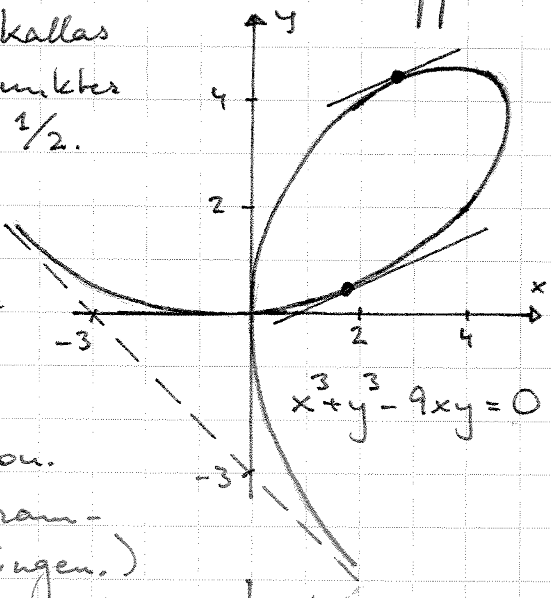


3) Vi skjuter en kanonkula med den fixa begynnelsefarten v_0 och vinkeln φ från horisontalplanet. Placera koordinaterna som i fig. ovan och bortse från luftmotstånd, Coriolis-kraft o.d. Då utsätts kulan för accelerationen $\ddot{\bar r}(t) = -g\hat{j}$ för $t > 0s$ (om vi sätter $t=0s$ i avfyrningsögonblicket).

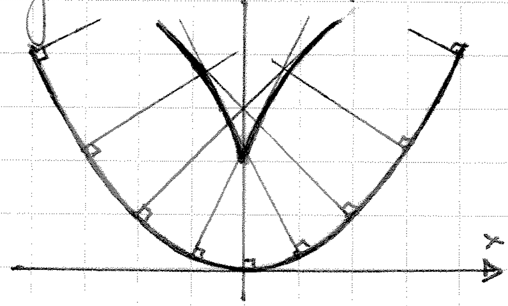
a) (gymnasiefysik): Bestäm kulans position $\bar r(t)$. När är kulan som högst? Hur högt är den då? Hur långt från kanonen landar kulan? Vilket val av φ maximerar avståndet till nedslagsplatsen?

b) (högskolematematik): Olika φ ger olika trajektorier för kanonkulorna. Bestäm trajektorieskarans envelopp.

4) Kurvan $f(x,y)=x^3+y^3-9xy=0$ kallas för Cartesii blad. Vi söker de punkter på kurvan, där lutningen är $=1/2$. Skriv om kravet $dy/dx = 1/2$ på formen $g(x,y)=0$ och använd Newtons metod för 2 ekvationer med 2 obekanta med begynnelsevärdena $(x_0,y_0)=(2,4)$ resp. $(x_0,y_0)=(2,1)$ en iteration. (Använd alltså inte parameterframställningen från 1:a datorövningen.)



Demo: Vi visar att envelopen av skaran av normallinjer till en plan kurva är kurvans evoluta (jämför med demo on v7).



På baksidan finns mellanförhör 2 från år 2003.

Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, Metsalo
Mellanförhör nr 2, 2003-03-24

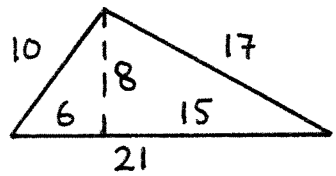
Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram** (ARK,AUT,EST,INF,KEM,KON,MAA,MAK,MAR,PUU,RYK,TIK,TLT,TUO)
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. Visa att funktionen $f(x,y) = x\cdot\cos(x-y) + y\cdot e^{x-y}$ satisfierar den partiella differentialekvationen $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = c\cdot\partial^2 f/\partial x\partial y$ för ett visst värde på konstanten c samt bestäm detta c-värde.

2. Herons formel säger att en plan triangel med sidorna a, b och c har arean $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där $s = (a+b+c)/2$ är halva omkretsen. Detta kan också skrivas $A(a,b,c) = \frac{1}{4}(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4))^{1/2}$.

   En triangel med sidorna 10, 17 och 21 har alltså arean $A = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84$, vilket också kan ses om man delar upp triangeln i två rätvinkliga trianglar.



   Sidorna hos en triangel uppmättes till 10.0±0.1m, 17.0±0.3m respektive 21.0±0.4m. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $A\approx 84\text{m}^2$ av arean, som osäkerheten i sidlängderna ger upphov till.

3. Låt oss studera ytan $xyz = 2$ i första oktanten (där $x,y,z > 0$). Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym.
   En triangel med basen b och höjden h har som bekant arean $A = bh/2$.
   En tetraeder eller mera allmänt en kon med basarean A och höjden h har som bekant volymen $V = Ah/3$.

4. För varje värde på parametern c ger ekvationen $y = cx + 2c^2$ en rät linje i xy-planet. Bestäm enveloppen för denna linjeskara.