Gk2 i Matematik, hemtal v11/06 Metsalo

Ow: 1) Uppg. 1, mellanförhör 2 – 2005 (se hemtalslappen v8)

2) Ekvationen $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ definierar en funktion $y = f(x)$ då $x > 0$. Speciellt är $f(1) = 1$. Bestäm $f'(1)$ och $f''(1)$ genom implicit derivering samt oskulerande cirkeln till kurvan $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ i punkten $(x, y) = (1, 1)$.

3) Låt $T(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3yz + \ln(x^2 + y^2)$.

a) Beräkna T:s gradient ∇T

b) Visa att $\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 \equiv 0$ (T harmonisk)

c) I vilken riktning ökar T fortast i punkten $(0, 1, 2)$ och hur fort ökar T i den riktningen i den punkten?

d) Hur fort ökar T i riktning mot origo i den punkten?

e) Bestäm Taylorpolynomet $P_2(x, y, z)$ av grad 2 av funktionen T, utvecklad i punkten $(a, b, c) = (0, 1, 2)$. Lämna P_2 med potenser av x $(= (x - 0))$, $(y - 1)$ och $(z - 2)$ i stället för att skriva ut polynomet i potenser av x, y och z.

4) Antag att $F(x, y, z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$, att $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ och att $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z \neq 0$ i (x_0, y_0, z_0), så ekvationen $F(x, y, z) = 0$ bestämmer funktionerna $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ och $z = z(x, y)$ implicit i en omgivning av punkten (x_0, y_0, z_0). Visa att $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$ i så fall

(och bli eventuellt av med en fördom).

Demo: Vi visar att de två ekvationerna

$$\begin{cases} F_1(u, v, w, x, y) = e^{ux} + x^2 y + \sin(vy^2) + vw^2 = 0 \\ F_2(u, v, w, x, y) = \ln(u + y^2) - x\cos(w) + y^3 - w + 2 = 0 \end{cases}$$

bestämmer funktionerna $x = g_1(u, v, w)$ och $y = g_2(u, v, w)$ implicit i en omgivning av punkten $(u, v, w, x, y) = (0, 0, 0, 1, -1)$. Vi beräknar också 1:a gradens Maclaurin-polynom till g_1 och g_2. (Med samma metod kan vi också beräkna högre gradens Maclaurin-polynom till g_1 och g_2.)

Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1) Visa att ekvationen $F(x,y,z) = z \cdot e^x + 2\cos(yz) = 0$ bestämmer funktionen $z = g(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten $(0,0,-2)$. Bestäm g:s Maclaurin-polynom av grad 2 (dvs. Taylor-polynomet utvecklat i origo).

2) Visa att ekvationerna $F_1(x,y,z) = xy + e^{yz} + x^3z - 3 = 0$ och $F_2(x,y,z) = \cos(y^2z) + \ln(y+xz) + x^2 - 5 = 0$ bestämmer funktionerna $x = g_1(y)$ och $z = g_2(y)$ implicit i en omgivning av punkten $(2,1,0)$. Bestäm 1:a gradens Taylor-polynom av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i punkten $y = 1$. (På motsvarande sätt kan man även bestämma Taylor-polynom av högre grad.)

3) $F(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$. Var är $F = 0$? Bestäm F:s tecken, där $F \neq 0$. Bestäm F:s kritiska punkter samt deras natur (lok. max, lok. min. eller sadelpunkt) mha. 2:a-derivatstestet. Jämför resultatet med F:s tecken.

4) Visa att fjärdegradspolynomet $p(x,y,z) =$
$= 1 - 2x + 4y - 14z + 2xy - 2xz - y^2 + 8yz - 9z^2 - y^4$ har exakt en kritisk punkt samt bestäm den.

b) Använd 2:a-derivatstestet för att avgöra huruvida den kritiska punkten är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt.

Demo: Halvklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 25^2$, $z \geq 0$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z) = 9x + 12y + 20z + 375$ (godt. enheter). Vi bestämmer alla kritiska punkter för δ i kroppen, på de två begränsningsytorna samt på begr. ytornas gemensamma begr. kurva. Likaså avgör vi var δ är högst resp. lägst samt hur hög densiteten δ är i dessa punkter.