Gk2 i Matematik, hemtal v9/06 Mehsalo

On: 1) 12.3.36 (Jämför med funktioner av en variabel!)

2) Visa att den givna funktionen satisfierar den givna partiella differentialekvationen:

a) $f(x,y)=\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$; $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2=0$

b) $f(x,t)=A\cos(\kappa x)e^{-\kappa^2 t}+B\sin(\kappa x)e^{-\kappa^2 t}$; $\partial^2 f/\partial x^2=\partial f/\partial t$ (A, B, κ konstanter)

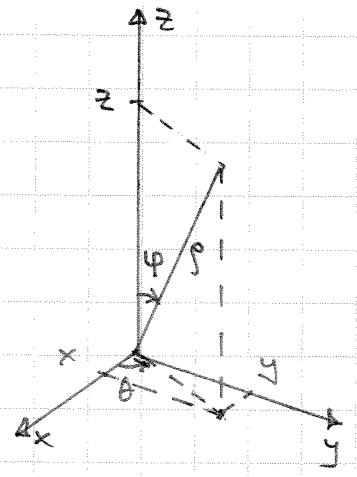
c) $f(x,t)=A\sin(x-ct)+B\cos(x-ct)$; $\partial^2 f/\partial t^2=c^2\cdot\partial^2 f/\partial x^2$

d) $f(r,\theta)=r^n\cdot(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$, $r\neq 0$; $r^2\cdot\partial^2 f/\partial r^2+r\cdot\partial f/\partial r+\partial^2 f/\partial\theta^2=0$ ($n\in\mathbb{Z}$; A, B konstanter)

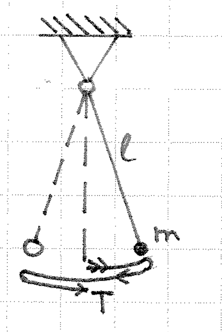
3) En simbassäng har längden 50m, men bredden kan varieras genom att flytta en mellanvägg. En dag breddades bassängen genom att mellanväggen flyttades med farten 0.1 m/min, samtidigt som vatten pumpades in 3m³/min. I det ögonblicket, då bredden var 8m, var djupet 1m. Med vilken fart ändrades djupet i det ögonblicket? Ökade eller minskade djupet just då?

4) Antag att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2+\partial^2 g/\partial v^2=0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y)=g(x^2-y^2,2xy)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$. Visa att h är också harmonisk, dvs. visa att $\partial^2 h/\partial x^2+\partial^2 h/\partial y^2=0$ i hela xy-planet.

Demo: $f(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$. Vi inför <u>sfäriska koordinater</u> ρ, φ och θ via $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$ (se även kap. 14.6). Då är $f(x,y,z)=f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)=F(\rho,\varphi,\theta)$. Vi uttrycker $\partial F/\partial\rho$, $\partial F/\partial\varphi$ och $\partial F/\partial\theta$ mha. f:s partiella derivator $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ & $\partial f/\partial z$.



Fr: 1) Svängningstiden T för <u>små</u> svängningar hos en matematisk pendel ges av $T=2\pi\sqrt{l/g}$, där l är den styva, viktlösa trådens längd och g är tyngdkraftsaccelerationen. Märk att svängningstiden inte beror på massan m.



Forts. på baksidan.

Fr. 1) (forts.) Svakar bygger en pendel för att bestämma en approximation av g. Han uppmäter l till 1.00 ± 0.03 m och T till 2.00 ± 0.05 s. Detta ger honom att $g \approx \pi^2$ m/s^2 (≈ 9.87 m/s^2). Använd differentialen till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $g \approx \pi^2$ m/s^2 av g, som osäkerheterna i l och T ger upphov till. (Den isokrona pendeln (se uppg. 4, fr v7) har konstant svängningstid också för stora svängningar, om man bortser från luftmotståndet.)

2) Uppg. 2, mellanförhör 2 - 2004 (se hemtalslappen v8)

3) Låt $f(x,y) = 5e^{xy} - \sin(3x) - y^2$.

a) I vilken punkt skär tangentlinjen till kurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ i punkten $(0,2)$ x-axeln?

b) I vilken punkt skär tangentplanet till ytan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ i punkten $(0,2,1)$ x-axeln?

4a) Bestäm en normalvektor till ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2 = 55$ i punkten $(5,3,2)$.

b) Bestäm en normalvektor till konen $x^2 = y^2+4z^2$ i punkten $(5,3,2)$.

c) Bestäm en tangentvektor till skärningskurvan mellan ellipsoiden och konen i punkten $(5,3,2)$.

Demo: 12Ch3 (Challenging Problems). Detta är den 3-dim. analogin till ex. 10 i kap. 12.5.