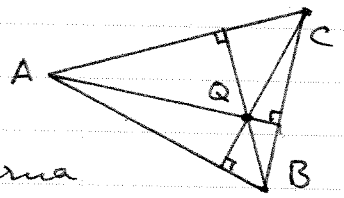
Gk2 i Matematik, hemtal v6/06 Metsalo

På insidan av detta blad finns uppgifterna från 2:a datorövningen i höstas (då vi använde Mathematica).

Öv: 1a) 10.2.8

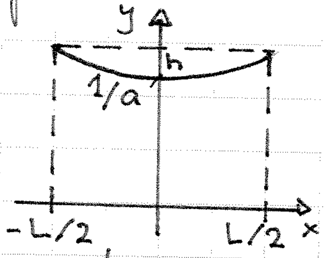


b) Visa (lämpligast mha. vektorer och skalärprodukten) att även de tre höjderna hos en plan triangel ABC skärs i en punkt Q (utanför triangeln, om den är trubbvinklig).

2a) Visa att punkterna $(-5,10)$, $(10,0)$ och $(-6,-8)$ ger en likbent triangel i $\mathbb{R}^2$ och att punkterna $(-3,2,-2)$, $(0,-2,3)$ och $(4,1,-2)$ ger en liksidig triangel i $\mathbb{R}^3$.

b) Visa att det inte finns några liksidiga trianglar i $\mathbb{R}^2$ med heltalskoordinater för hörnpunkterna.

3) I kap. 10.2 visas att då en kedja hänger fritt, ges dess ekvation av $y = \frac{1}{a}\cosh(ax)$, om vi väljer koordinaterna lämpligt. En kedja med längden L, upphängd som i figuren, är horisontell, men en kedja med längden $L+\Delta L$ sackar sträckan h i mitten. Visa mha. Maclaurinutvecklingar att om $\Delta L \ll L$ (mycket mindre än), så är $h \approx \sqrt{\frac{3}{8}\cdot L\cdot \Delta L}$.



4a) 11.1.22 b) 11.1.23

Demo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ A är symmetrisk och har (de reella) egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$ med tillhörande egenvektorer

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ resp. } \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(Kontrollera! Se även datorövn. 1 i Gk 1.)

Mha. egenvärdena och -vektorerna ovan visar vi att 2:agradsytan $x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz-x-y-z=0$ är en elliptisk paraboloid, vars ekvation är $v^2+3w^2=\sqrt{3}\,u$ i ett uvw-koordinatsystem, vridet i förhållande till det urspr. xyz-koord.systemet. Vi får de nya, vridna koordinaterna via

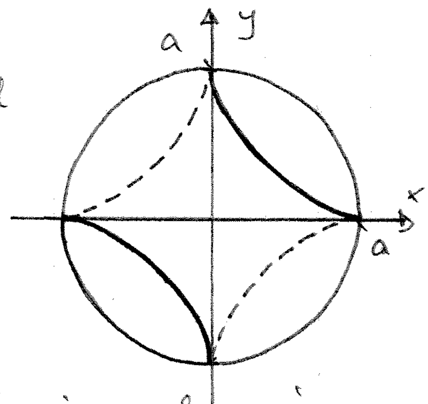
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ där } V = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Märk: $V^{-1} = V^T$.

Fredagens hemtal på baksidan.

Fr: 1a) 11.1.7 b) 11.1.14 (kurvan kallas Vivianis kurva)

2) Svaken har efter noggranna observationer kommit fram till att "sömmen" hos en tennisboll med radien a av allt att döma har en projektion i form av en asteroid: $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $xyz \geq 0$.



Ge sömmen på parameterform (speciellt $z(t)$; $x(t)$ och $y(t)$ är ju redan givna. $1 = 1^3 = (\cos^2 t + \sin^2 t)^3$ kan underlätta) och bestäm sömmens tangentlinje i punkten, som svarar mot parametervärdet $t = \pi/6$.

3) Bestäm längden hos rymdkurvan $\bar{r}(t) = 3t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ från punkten $(-3, 3, -2)$ till punkten $(6, 12, 16)$.

4) Bestäm längden hos överhandsknopen $\bar{r}(t) = (2 + \cos(3t/2)) \cdot \cos t\,\hat{i} + (2 + \cos(3t/2)) \cdot \sin t\,\hat{j} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \sin(3t/2)\,\hat{k}$.
Rita gärna knopen mha. Mathematica (ParametricPlot3D är ett lämpligt kommando) för att se, hur den ser ut.

Demo: 11. Ch. 4 (Challenging Problems): Tantokronen