Gk2 i Matematik, hemtal v3/06 Metsalo

Vi kommer under den närmaste framtiden att gå igenom kap. 8–11 i Adams. Det lönar sig att friska upp minnet genom att också studera kap. 8.1–3 i Kreyszig.
På insidan av detta blad finns kägelsnitten på standardform.
Ekvationer av typ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ger kägelsnitt och vi kan analysera dem fullständigt.
Om vi i ekvationen för någon kurva i planet ersätter x med $x - x_0$ och y med $y - y_0$ motsvarar detta som bekant att kurvan förskjuts med vektorn (x_0, y_0).

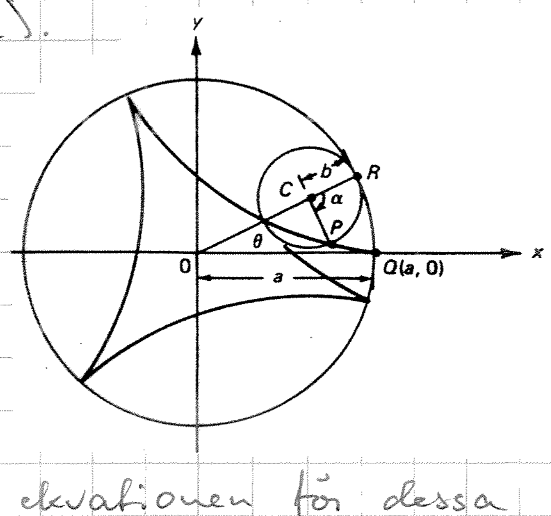
Om: Demo: I ex. 8 i kap. 8.2 i Adams härleds cykloiden, som ritas av en punkt på periferin av en cirkel då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln, cirkelns radie är b (a i ex. 8 i boken) och cirkeln rullar ovanpå x-axeln, får vi att cykloiden ges på parameterform av

$$(x, y) = (b(t - \sin t), b(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Se fig. 8.22/8.21 (uppl. 5/uppl. 4) på sid. 493.)
Vi kommer att härleda ekvationen för trochoiden, kurvan som ritas av en punkt på avståndet c från mittpunkten hos en cirkel med radien b då cirkeln rullar utan glidning längs en rät linje. Om linjen är x-axeln och cirkeln rullar ovanpå x-axeln får vi att ekvationen blir

$$(x, y) = (bt - c\sin t, b - c\cos t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(om $b = c$ får vi cykloiden).



Om en cirkel med radien b rullar utan glidning innuti en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en hypocykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en hypotrochoid). Vi härleder ekvationen för dessa kurvor och visar att asteroiden (känd från busstrappsteget) är en hypocykloid.

(forts. på baksidan)

Ou: (forts): Om slutligen en cirkel med radien b rullar utan glidning utanpå i stället för inuti en fix cirkel med radien a, kommer en punkt på den rullande cirkelns periferi att rita en epicykloid (och en annan punkt på den rullande cirkeln en epitrokoid). Vi härleder också ekvationen för dessa kurvor och visar att kardioiden i fig. 8.38/8.39 är en epicykloid.

Rita gärna dessa kurvor m.h.a. Matlab eller Mathematica som på datorövningarna i Gk1. Vidare kan det också vara intressant att rita några Lissajous-figurer (jmf. med uppg. 8.2.23 − 26). Pröva olika värden på m och n och titta vad som händer, om m och n har respektive saknar gemensamma faktorer.

Fr: 1a) 8.1.2 b) 8.1.10 c) 8.1.12 i Adams

2) Vi studerar en ellips E och en hyperbel H i planet. E:s toppar är H:s brännpunkter och H:s toppar är E:s brännpunkter. E:s ekvation är $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Bestäm H:s ekvation samt ekvationerna för dess asymptoter på formen $y=ax+b$.

3a) Visa att kurvan $(x,y)=(t^3-2t^2-t+3,\ 2t-t^2-2/t)$ har tre tangentlinjer i punkten $(x,y)=(1,-1)$ och bestäm ekvationerna för dessa på formen $y=ax+b$.

b) Linjen $x=3$ är en vertikal asymptot till kurvan, ty $\lim_{t\to 0^\pm} y(t)=\mp\infty$, $\lim_{t\to 0^\pm} x(t)=3^\mp$. Vidare bildar kurvan en ögla, som är en enkel, sluten kurva (vilket vi kommer att se på datorövningen). Beräkna arean hos området innanför öglan.

4a) 8.4.9 b) 8.4.10b) c) 8.4.22 i Adams

Anmärkning: högskolematematik går inte ut på att lära sig ~~att~~ slå upp rätt formel i någon lärobok eller formelsamling!

Demo: Vi analyserar kurvan $4x^2-4xy+7y^2-24y=0$.

Pga. krysstermen $-4xy$ måste vi vrida på koordinatsystemet, innan vi kan komplettera kvadraterna.