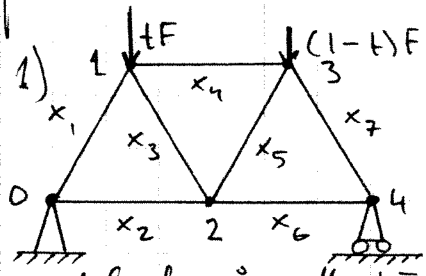
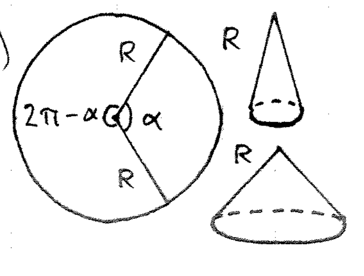
Gk1 i Matematik, datorövning 3, 24.11.2005 Metsalo

0) Läs igenom uppg. 0 från datorövn. 1 och handla därefter!

Under denna datorövning använder vi också programpaketet Mathematica, så det kan vara värt att taga med uppgiftsbladet till datorövning 2 (med den lilla sammanfattningen på baksidan) samt Lankkanens kompendium.

1) 

Vi studerar en generalisering av problemet med fackverket i uppg. 4, fr v39 och uppg. 5, datorövn. 1. Nu är totalkraften F uppdelad så att tF belastar nod 1 och $(1-t)F$ nod 3 (med $t \in [0, 1]$; tidigare var $t = 0.7$). Sätt $F = 1$, så dragkrafterna x_i blir multiplar av F. Högerledet $\bar{b}$ i ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ blir nu beroende av parametern t. Efter att ha matat in koefficientmatrisen A och (den vektorvärda funktionen) $\bar{b}$ får vi vektorn $\bar{x}$ med de sökta dragkrafterna via x = Simplify[Inverse[A].b]. Sedan kan vi plotta dragkrafterna som funktioner av parametern t via kommandot Plot[Evaluate[x], {t, 0, 1}].
Avgör vilken kurva hör till vilket stag, vilket värde på t minimerar maximala dragkraften (då $x_i > 0$), vilket värde på t minimerar maximala tryckkraften (då $x_i < 0$), vilka stag har hög drag- resp. tryckkraft då (så de kanske borde förstärkas) samt vilka stag har låg drag- resp. tryckkraft då (så de eventuellt kan bytas ut mot svagare och kanske billigare stag).

2) 

Detta problem är en fortsättning på 4.5.43 i Adams (uppg. 4, fr v45), då vi tillverkade en kon med maximal volym ur en cirkelskiva. Nu skär vi ut en sektor med vinkeln α ur en cirkelskiva med radien R och viker sedan <u>två</u> räta cirkulära koner. Bestäm vilket värde på α ger maximala <u>sammanlagda</u> volymen hos de två konerna. (Forts. på insidan)

2) (forts.) Här kan Solve vara bra för att bestämma derivatans nollställen (exakt), fast NSolve, som ger närmevärden, är nog mera praktisk. För att plotta totala volymen som en funktion av vinkeln α är det lämpligt att sätta $R = 1$ (varvid vi får volymen som multiplar av R^3). Vi kan också försöka approximera derivatans nollställen "själva" mha. intervallhalvering eller Newtons metod.

3) Plotta $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin(x)}$ och dess Maclaurinpolynom av grad 3 från förra fredagens övning i en omgivning av $x = 0$ för att se, hur väl Maclaurinpolynomet approximerar den ursprungliga funktionen. Om det gamla x:et från uppg. 1 stör, så gör Remove[x].

4) arctan x är definierad i hela $\mathbb{R}$ och dess Maclaurinpolynom av grad 2n är $P_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (arctan är en udda funktion, så dess Maclaurinpolynom har bara udda potenser av variabeln). I intervallet $[-1, 1]$ approximeras funktionen tämligen väl av polynomet (allt bättre approximation, ju högre gradtal vi tar). Rita arctan x och $P_{2n}(x)$ för några olika gradtal i samma figur, som täcker ~~ett~~ större intervall än $[-1, 1]$, t.ex. $[-1.5, 1.5]$, för att se sambandet mellan funktionen och Taylor- (i detta fall Maclaurin-) polynomet och varför det blir problem utanför intervallet $[-1, 1]$, då gradtalet växer! På våren studerar vi serier och undersöker fenomenet mer ingående.

5) I uppgift 1, ti v45 studerade vi kurvan $x^2 + e^{3x} = y + \cos y$, som är grafen $y = f(x)$ av en funktion f, som vi bara får implicit ur ekvationen och som satisfierar $f(0) = 0$. Med hjälp av implicit derivering beräknade vi $f'(0)$ och $f''(0)$ och med hjälp av dessa kan vi bilda f:s Maclaurinpolynom av grad 2: $f(x) \approx P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$. Nu låter vi Mathematica bilda 5:e gradens Maclaurinpolynom till $f(x)$.

5) (forts.) Gör först `Remove[x, y, g]` så att inte eventuella gamla definitioner stör de nya. Definiera

`g[x_, y_] := x^2 + Exp[3*x] - y - Cos[y]` och

`insatt = x -> 0` samt `y[0] = 0`. Sedan bildar vi en tabell över våra krav via kommandona

`krav1 = Table[D[g[x, y[x]] == 0, {x, k}], {k, 1, 5}]` och

`krav2 = krav1 /. insatt` De sökta derivatorna fås via

`deriv = Table[D[y[x], {x, k}], {k, 1, 5}] /. insatt` och de sökta derivatornas värden fås via

`derivvarden = First[Solve[krav2, deriv]]`. Då borde vi känna igen `y'[0]` och `y''[0]` från räkneövningen. Maclaurin-polynomet av grad 5 får vi via

```
poly = Sum[(D[y[x], {x, k}] /. insatt /. derivvarden) /
  k! * (x - (x /. insatt))^k, {k, 0, 5}]
```

Ladda därefter paketet ImplicitPlot via kommandot

``<<Graphics`ImplicitPlot` `` och rita kurvan g = 0 via

`bild1 = ImplicitPlot[g[x, y] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]`.

`bild2 = Plot[poly, {x, -0.2, 0.2}, PlotRange -> {-1, 1}]` ger Maclaurin-polynomets graf och `Show[Bild1, bild2]` sammanför de två figurerna.

6) Låt Mathematica beräkna några av förra fredagens gränsvärden och tisdagens integraler och kontrollera gärna svaren till morgondagens hemtal. Glöm dock inte, att vi vill ha lösningarna, inte bara svaren. Om några av uppgifterna från de tidigare datorövningarna är ogjorda, kan dessa också göras.

Lämna Mathematica m.h.a. Exit, stäng fönstret och glöm inte att logga ut.