GkL i Matematik, datorövning 1, 20.10.2005 Metsalo

0) Datorövningarna kräver förberedelser hemma precis som räkneövningarna. Att läsa igenom uppgifterna för första gången då man redan sitter vid datorn är att kasta bort möjligheten att lära sig något! Gå igenom materialet i lugn och ro hemma. Tänk efter hur man rent matematiskt skall gå tillväga för att lösa uppgifterna och vilka områden av figurerna som är av intresse. Låt sedan datorn göra räknearbetet.

Under denna datorövning lär vi oss att använda programpaketet Matlab. Namnet kommer från MATrix LABoratory och Matlab arbetar med matriser av tal.
Logga in direkt i arbetsstationen vid vilken ni sitter. Därefter anropar ni programpaketet Matlab genom att skriva use matlab ↵. Sedan startar ni Matlab genom att skriva matlab ↵. Matlab ritar upp nya fönster och svarar med >> när den är beredd att taga emot kommandon.

Lär er att använda pilknapparna ←, ↑, ↓ och → genom att t.ex först beräkna 1+1 och sedan via knapparna ↑ och ← manipulera kommandoraden till 2+1. Om ett kommando skall användas många gånger med små variationer behöver man inte skriva om allting från början.
Kommandot help namn ger information om funktionen namn. Detta kan vara till nytta, om datorn är missnöjd och ger felmeddelanden.
Gå gärna igenom några exempel i Matlab-opas.

1) Studera först funktionen roots mha. help roots och lös därefter 3:e-gradsekvationen från uppg. 2, fr v38:
$p(z) = z^3 + (-2-5i)z^2 + (-10+10i)z + (8+6i) = 0.$
Inmatning av matriser och vektorer beskrivs på sid. 10-11.
Kontrollera svaren via insättning.
Varning: jag fick problem vid användandet av ^ (upphöjt till). Skriv z*z i stället för z^2 och z*z*z i stället för z^3 i kontrollen.

2) Lös det linjära ekvationssystemet mha. Gauss-Jordans metod eller Gauss' elimination med påföljande bakåtsubstitution:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Bilda en 3×3-matris A, som innehåller koefficienterna samt en 3×1-matris (dvs. en kolumnvektor) b, som innehåller högerledet. Bilda därefter den sammansatta matrisen C=[A, b], som kommer att vara en 3×4-matris. Alla radmanipulationer utförs sedan på matrisen C.

Ex: $nr3 = r3 - 2 \cdot r1$ skrivs C(3,:) = C(3,:) - 2*C(1,:)

$nr2 = \frac{1}{(-5)} \cdot r2$ skrivs C(2,:) = (-1/5)*C(2,:)

(vi behöver inte exakt dessa radmanipulationer!)

Spara gärna mellansteg genom att skriva C1=C med jämna mellanrum. C1 är då en backup-matris, om man råkar göra något fel så C förstörs. Kontrollera svaret via insättning.

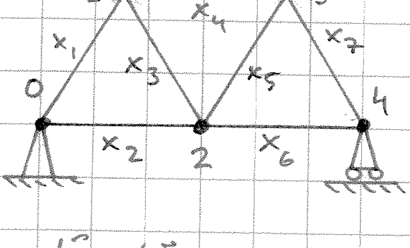
3) Lös samma uppgift mha. inversmatrisen, dels genom att beräkna inv(A)*b, dels A\b (division med matrisen A från vänster, dvs. multiplikation med A:s inversmatris från vänster). Märk hur dessa två metoder ger samma svar uttryckt på olika sätt, beroende på att svaret beräknas på olika sätt.

4) Lös det linjära ekvationssystemet som i uppg. 2 eller 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Ifrågavarande koefficientmatris saknar inversmatris (beräkna dess determinant via det(A)!), så vi kan inte beräkna inv(A). Bestäm först lösningarna "manuellt" som i uppg. 2 (det finns oändligt många) och pröva därefter metoderna i uppg. 3.

5)




Lös problemet med fackverket från uppg. 4, fr v39! Sätt F = 1 så blir dragkrafterna $x_i$ multiplar av F. Vilket stag i fackverket har största drag- resp. tryckkraften? (Dessa borde kanske förstärkas, medan stag med små drag- eller tryckkrafter kan kanske ersättas med svagare (och därmed förhoppningsvis billigare) stag.)

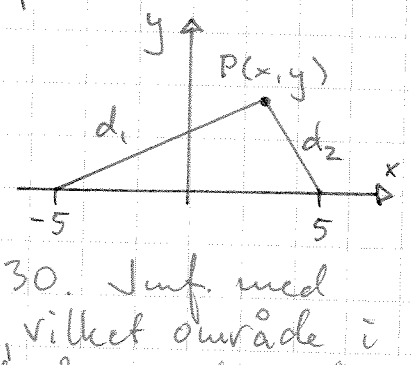
6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Beräkna egenvärdena och tillhörande egenvektorer till den symmetriska matrisen A mha. funktionen eig, som ger normerade egenvektorer. Kontrollera att egenvärdenas produkt är det(A). Vad medför symmetrin hos A för egenvektorerna?

7) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Beräkna det(B) och inv(B). Beräkna B:s egenvärden och tillhörande egenvektorer mha. eig. Observera, att bägge egenvärdena har algebraisk multiplicitet 2, medan det ena har geometrisk multiplicitet 2 och det andra bara geom. multiplicitet 1.

8a) Skissa kurvan $y = \sin(1/x)$ för $x \in [-1, 1]$. Jämför med ex. 6 på sid. 48. `x=-1:0.01:1; y=sin(1 ./x); plot(x,y)` borde fungera. Kom ihåg att Matlab arbetar med matriser så om man inte specificerar, att operationen skall utföras komponentvis (genom en punkt • framför operationen), försöker Matlab utföra den på matriser. Mellanslag mellan ettan och pricken, för annars tolkas den som en decimalpunkt. Semikolon; efter ett kommando gör att resultatet inte skrivs ut. Märk att funktionen uppför sig illa nära $x = 0$.

b) Skissa kurvan $y = f(x) = x + 2x^2 \cdot \sin(1/x)$ för $x \in [-0.1, 0.1]$. (Jag hade som sagt problem med ^ (upphöjt till), men `y = x+2*x.*x.*sin(1 ./x);` borde fungera.) På sid. 48 illustreras också, hur derivatan kan beräknas numeriskt. Skissa även kurvan $y = f'(x)$.

9) För punkten P(x, y) låter vi $d_1$ beteckna avståndet från P till (−5, 0) och $d_2$ avståndet från P till (5, 0). Rita kurvorna




$d_1 \cdot d_2 = 20$, $d_1 \cdot d_2 = 25$ och $d_1 \cdot d_2 = 30$. Jmf. med ex. 9 på sid. 52-53 och tänk efter, vilket område i xy-planet är av intresse. Tag också en utskrift genom att trycka på File i figuren, välja Print och sedan t.ex. skrivaren Maari2. Kurvan $d_1 \cdot d_2 = 25$ är en <u>lemniskata</u>. Den är oändlighetstecknets förebild.

Om en punkt rör sig i planet, ges dess koordinater som två funktioner av tiden: $(x,y) = (f(t), g(t))$. I så fall sägs kurvan, längs vilken punkten rör sig, vara given på <u>parameterform.</u> Kurvan $y = h(x)$ kan enkelt ges på parameterform: $(x,y) = (t, h(t))$. Parameterform är alltså en generellare metod att ge kurvor i planet än $y = h(x)$.

10) <u>Asteroiden</u> $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, som vi också studerar under flera räkneövningar kan ges på parameterform som $(x,y) = (a\cdot\cos^3 t, a\cdot\sin^3 t)$. Välj t.ex. $a = 1$ och rita asteroiden. Rita också in enhetscirkeln i samma figur mha. hold on. Glöm inte att göra hold off efteråt. Asteroiden fås via t = 0:0.1:6.3; c = cos(t); s = sin(t); x = c.*c.*c; y = s.*s.*s; plot(x,y). grid ger ett rutnät och axis('square') gör att figuren täcker en kvadrat. I detta fall medför detta att axlarna får samma skala.

11) Slutligen en <u>utmaning</u> som kräver förberedande arbete och även arbete efteråt: Från tidigare har vi att

$\sum_{k=1}^{n} k^0 = 1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n = \frac{1}{1}\cdot n^1$,

$\sum_{k=1}^{n} k^1 = 1^1 + 2^1 + \ldots + n^1 = \frac{1}{2}\cdot n(n+1) = \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{2}\cdot n$,

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\cdot n^3 + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{6}\cdot n$ och att

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}\cdot n^4 + \frac{1}{2}\cdot n^3 + \frac{1}{4}\cdot n^2$ (via induktion).

Ur detta kan man gissa (<u>ansätta</u> för att använda ett finare ord), att $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{5}\cdot n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$ för (än så länge okända) konstanter a, b, c och d. Beräkna $\sum_{k=1}^{n} k^4$ för $n = 1, 2, 3$ och 4 och sätt upp ett linjärt ekvationssystem för att bestämma a, b, c & d. Använd slutligen induktion för att undersöka, om ansatsen stämmer också för $n > 4$, dvs. om vi har fått en formel för $\sum_{k=1}^{n} k^4$, $n \in \mathbb{N}$.

Lämna Matlab mha. kommandot quit. Glöm sedan inte att logga ur datorn. Använd gärna Matlab för att kontrollera svaren till hemtalen, då det är möjligt. De uppgifter som ni inte hinner göra under datorövningen kan ni försöka göra vid något senare tillfälle, om ni hittar någon ledig arbetsstation.