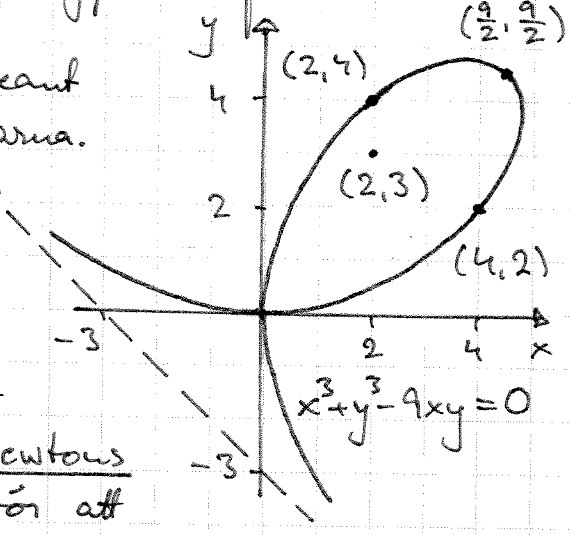
Gk2 i Matematik, datorövning 3, 27.4.2006 Metsalo

Uppgifterna kräver en hel del __förberedelser__ hemma! Vi börjar med programpaketet __Matlab__ och fortsätter sedan med __Mathematica__. Tag därför med bägge kompendierna.



1) Cartesii blad $x^3+y^3-9xy=0$ är bekant från bl.a. de tidigare datorövningarna. Om vi studerar själva öglan hos Cartesii blad, så är origo längst bort från punkten (2,3). Men på öglan antar avståndet till (2,3) också ett lok. max. och ett lok. och ett glob. min. Använd __Newtons metod__ (se hemtalslappen v12) för att approximativt bestämma dessa tre punkter. Efteråt kan det vara bra att __kontrollera__ svaren mha. parameterframställningen i datorövning 1.

Varning: jag fick problem vid användandet av ^ (upphöjt till) i Matlab. Men power(2,3) gör t.ex. samma sak som 2^3.

Använd format long för att få fler decimaler och arbeta förslagsvis med en 3-kolumnvektor x, vars komponenter är punktens x-koordinat, punktens y-koordinat samt Lagrange-multiplikatorn λ. Elementen i vektorn x anropas som x(1), x(2) resp. x(3). Lämpliga begynnelsevärden för x och y (dvs. x(1) och x(2)) fås ur figuren ovan, lämpliga begynnelsevärden för λ (dvs. x(3)) kan fås ur endera av de två ekvationerna

$\partial L/\partial x = 0$ (dvs. $\partial f/\partial x + \lambda \cdot \partial g/\partial x = 0$) och

$\partial L/\partial y = 0$ (dvs. $\partial f/\partial y + \lambda \cdot \partial g/\partial y = 0$).

Alternativt kan man dra till med något λ-värde och hoppas, att iterationen ändå konvergerar (går det, så går det!).

Gott råd: avståndet till punkten minimeras/maximeras, då avståndets kvadrat minimeras/maximeras.

v.g. vänd

2) Matlab kan rita grafer av och nivåkurvor för funktioner av två variabler. Studera ex. 9 på sid 52-53 i Matlab-opus och rita ytan $z = F(x, y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$ från fr v11! Rita också funktionen F:s nivåkurvor.
Goda råd: semikolon ; efter ett kommando gör att Matlab inte skriver ut svaret. Vidare arbetar Matlab med matriser, så om man vill att en operation (t.ex. multiplikation) skall utföras komponentvis, måste man sätta en punkt . framför operationen.

Lämna Matlab mha. kommandot quit och starta Mathematica. Mathematica kan bl.a. derivera och integrera symboliskt och göra annat, som Matlab inte klarar av, eftersom Matlab arbetar med siffror.

3) Använd NIntegrate till att approximera längden och tyngdpunkten hos Vivianis kurva från bl.a. on v7 (11.5.11). Av symmetriskäl finns tyngdpunkten naturligtvis på y-axeln.

4) Mathematica kan även beräkna multipla integraler. Använd Integrate till att beräkna volymen hos miljonärens bassäng från on v9.

5) Mathematica kan skissa ytor på parameterform mha. ParametricPlot3D (jmf. med 1:a datorövningen).
a) Skissa Möbius-bandet $\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = ((1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\cos v,\ (1+u\cdot\cos\frac{v}{2})\cdot\sin v,\ u\cdot\sin\frac{v}{2})$ för $u \in [-1/4, 1/4]$, $v \in [-\pi, \pi]$.
b) Skissa ytan $\bar{r}(u,v) = (\tan v - u\cdot\sin v,\ -u,\ 1 - u\cdot\cos v)$ för $u \in [-2, 4]$, $v \in [-1.4, 1.4]$. Sätt PlotRange -> All inuti ParametricPlot3D-kommandot, så att inte Mathematica kapar av en del av ytan.
c) Approximera arean hos ytan i b)-delen mha. NIntegrate.

6a) Skissa åter grafen av $F(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$, denna gång mha. Plot3D (och om ^ ställer till med problem i Mathematica kan det hjälpa att klicka det två gånger). Skissa F:s nivåkurvor mha. ContourPlot. $|x|, |y| \leq 2$ är ett lämpligt område. PlotPoints -> 30, Contours -> 16 inuti ContourPlot-kommandot ger en bättre figur.

b) Ladda programpaketet PlotField mha. kommandot <<Graphics`PlotField` (och om ` ställer till med problem, kan det även här hjälpa att klicka det två gånger). Skissa vektorfältet $\bar{u}(x,y) = \text{grad}(F) = \nabla F = \partial F/\partial x\, \hat{i} + \partial F/\partial y\, \hat{j} = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ mha. PlotVectorField. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan F och ∇F: ∇F pekar åt det håll, varåt F ökar snabbast och dess längd ger F:s ökningshastighet i den riktningen.

c) Skissa skalärfältet $g(x,y) = \text{div}(\bar{u}) = \nabla \bullet \bar{u} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$, där $\bar{u}$ är vektorfältet från b)-delen mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $\bar{u}$ och $\nabla \bullet \bar{u}$: $\nabla \bullet \bar{u}$ är positivt, där $\bar{u}$ lokalt sprider sig och negativt, där $\bar{u}$ lokalt drar sig samman.

7) Skissa vektorfältet $\bar{v}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j} = \left(-2xy/\sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\right)\hat{i} + \left((x^2-y^2-1)/\sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}\right)\hat{j}$.
Vi kan tänka oss $\bar{v}$ som ett plant vektorfält i $\mathbb{R}^3$: $\bar{v}(x,y,z) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j} + 0\hat{k}$. Då kan vi beräkna vektorfältet $\bar{w}(x,y,z) = \nabla \times \bar{v} = \{\text{efter räkningar}\} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\hat{k} = h(x,y)\hat{k}$. Skissa skalärfältet $h(x,y)$, som alltså är vektorfältets $\nabla \times \bar{v}$ k-komponent (enda komponenten, eftersom $\bar{v}$ är ett plant vektorfält parallellt med xy-planet) mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna för h och vektorfältet $\bar{v}$ mha. Show (gör PlotPoints -> 30, Contours -> 16 igen) och studera sambandet mellan $\bar{v}$ och $\nabla \times \bar{v}$.

v. g. vänd

Mathematica kan lösa en del differentialekvationer analytiskt mha. DSolve och andra numeriskt mha. NDSolve. Friska upp minnet om de analytiska metoderna från Gk1 genom att åter gå igenom kap. 7.9 och 13.7 i Adams. En del numeriska metoder för lösning av differentialekvationer beskrivs i appendix IV i 5:e upplagan resp. kap. 17 i 4:e upplagan av Adams och i kap. 19.1–2 i Kreyszig.

8a) Lös den separabla diff.ekvationen $y' = 2x^2y^2$ mha.
DSolve[y'[x] == 2*x^2*(y[x])^2, y[x], x].

b) Bestäm allmänna lösningen till 1:a ordningens linjära diff.ekvationen $y' = y + \cos x - \sin x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelsevillkoret (BV) $y(0) = 0$. Jämför lösningarna med lite olika BV $y(0)$.
Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, xmin, xmax}] med lämpliga värden på xmin och xmax insatta direkt efter DSolve-kommandot ritar lösningskurvan.

9) Approximera några lösningskurvor till $y' = x^2 + y^2 - 1$ mha. NDSolve. Använd t.ex. BV $y(0)=1$, $y(0)=0$ och $y(-1)=0$ och rita lösningskurvorna som i uppg. 8c) ovan.

Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret och anropa Netscape genom att skriva netscape.

10) Skriv adressen http://matta.hut.fi/matta2/ och välj DEW1 från Materiaalit. DEW1 är ett paket för numerisk lösning av 1:a ordningens diff.ekvationer. Skriv in diff.ekvationen i motsv. ruta (välj t.ex. de två DE från uppg. 8 eller den från uppg. 9 ovan). Observera, att där heter den oberoende variabeln t, inte x.
DEW1 ritar ett fält av tangentlinjesegment och om ni väljer en punkt med musen eller genom att mata in koordinaterna, ritar datorn en approximation av lösningskurvan, som går genom den punkten.

Lämna Netscape och glöm inte att logga ut.