Gk2 i Matematik, datorövning 1, 16.2.2006 Metsalo

0) Vi använder programpaketet Mathematica. Läs igenom uppg. 0 från höstens datorövn. 1 samt sammanfattningen av Mathematica på insidan av kentalslappen v6.
Jag hade problem med användandet av ^ (upphöjt till) och ` (apostrof). Men genom att trycka två gånger fick jag upp motsvarande tecken.

1) Rita kurvan $(x, y) = (t^3 - 2t^2 - t + 3,\ 2t - t^2 - 2/t)$ från uppg. 3, fr v3 mha. ParametricPlot. Figuren kan begränsas i y-led genom att i ParametricPlot-kommandot skriva PlotRange->{ymin, ymax} med lämpliga värden på ymin och ymax. Observera att öglan, som kurvan bildar, ~~fakt~~ faktiskt är enkel.

2) Ladda programpaketet Graphics mha. kommandot <<Graphics`Graphics` och rita kurvan, som ges i polära koordinater av $r = \cos^2 t$ (där t är polära vinkeln, ofta betecknad θ) mha. PolarPlot.
Beräkna volymen hos en av "bollarna" som uppstår då kurvan roterar kring x-axeln mha. Integrate och approximera arean hos "bollens" begränsningsyta mha. NIntegrate.

3a) Rita Vivianis kurva från förra fredagen och igår mha. ParametricPlot3D samt kurvans projektioner på koordinatplanen.

b) Rita sömmen hos Svakars tennisboll från förra fredagen och approximera dess längd mha NIntegrate.

4a) Rita kurvan, som ges i polära koordinater av $r = 2 + \cos(3t/2)$ (där t är polära vinkeln). mha. PolarPlot.

b) Rita överhandsknopen från förra fredagen mha. ParametricPlot3D.

Forts. på baksidan.

4c) $\bar{r}(t,v) = (x(t,v), y(t,v), z(t,v)) =$
$= ((2+\cos(3t/2))\cdot\cos t + \cos t\cdot\cos v/5,$
$(2+\cos(3t/2))\cdot\sin t + \sin t\cdot\cos v/5,$
$\sin(3t/2)\cdot\sqrt{21}/5 + \sin v/5)$, $t\in[0,4\pi]$, $v\in[0,2\pi]$
ger en yta på parameterform, nämligen en förtjockad version av knopen i b)-delen. Rita även den mha. ParametricPlot3D.

5) Låt $a=\sqrt{5}+1$ och $b=2$. Skriv om ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ på parameterform som i gårdagens uppg. 1 och rita den mha ParametricPlot. Rita också dess evoluta (se gårdagens demo) och sammanför de två bilderna mha. Show. AspectRatio -> 1 inuti Show-kommandot gör att figuren täcker en kvadrat. Med våra val av a och b medför detta att vi får samma skala på axlarna. Tänk på hur den ursprungliga kurvan kan återskapas ur evolutan mha. en bit snöre och en penna.

6) $(x,y) = \left(\frac{9-9t^2}{2+6t^2}\cdot(1-t), \frac{9-9t^2}{2+6t^2}\cdot(1+t)\right)$
ger Cartesii blad $x^3+y^3=9xy$ på parameterform. Rita kurvan och dess evoluta och bestäm kurvans krökningsradie i origo (där vi inte kan använda implicit derivering, eftersom ingendera variabeln är en funktion av den andra i en omgivning av origo).

7) Låt Mathematica beräkna hur mycket David, Niklas, Petter och Quintus dricker under sillfrukosten. Använd Sum och Infinity.

8) Rita gärna några kurvor från demo-övn. on v3.

Lämna Mathematica mha. Exit, stäng Mathematica-fönstret mha. musen och logga ut mha. musen.

På insidan finns mellanförhör 1 från åren 2004 och 2003.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1 23.2.2004

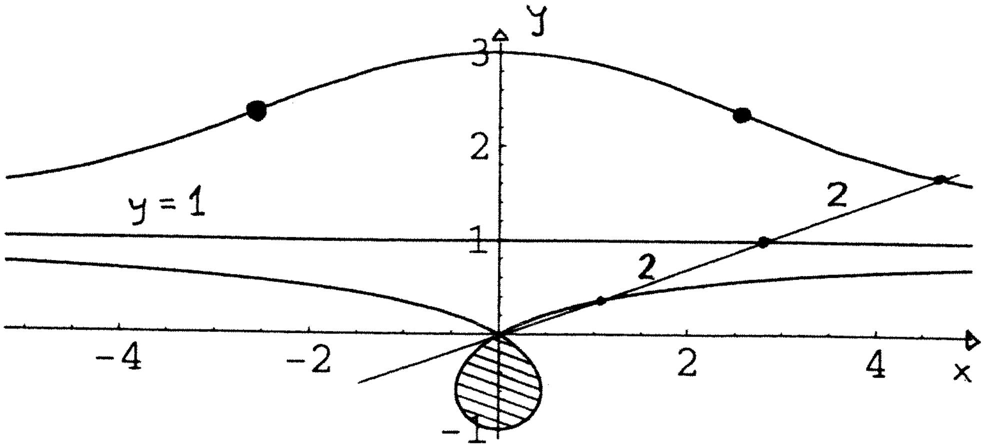
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. Om f och g är differentierbara reellvärda funktioner, definierade i $\mathbf{R}$, så gäller som bekant att $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.
Låt nu $\vec{u}(t) = u_1(t)\vec{i} + u_2(t)\vec{j} + u_3(t)\vec{k}$ och $\vec{v}(t) = v_1(t)\vec{i} + v_2(t)\vec{j} + v_3(t)\vec{k}$ vara 3-vektorvärda funktioner, definierade i $\mathbf{R}$. Visa följande analogier till deriveringsformeln ovan:
a) $(\vec{u} \bullet \vec{v})'(t) = \vec{u}'(t) \bullet \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \bullet \vec{v}'(t)$
b) $(\vec{u} \times \vec{v})'(t) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$.

2. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{4}}{16} + \cdots$ konvergerar. (2p.)
b) Eftersom det rör sig om en konvergent positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa. Bestäm någon övre gräns för seriens summa. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad. (4p.)

Den horisontella linjen $y = 1$ kan ges med polära koordinater som $y = r\sin\theta = 1$, dvs. $r = \frac{1}{\sin\theta}$. Då $\theta \in]0, \pi[$, är $r \geq 1$ och vi får linjen; då $\theta \in]\pi, 2\pi[$, är $r \leq -1$ och vi får linjen igen. Kurvan $r = h(\theta) = 2 + \frac{1}{\sin\theta}$ i figuren nedan är en *konkoid*. Den består av två delar: då $\theta \in]0, \pi[$, är $r \geq 3$ och vi får kurvan ovanför linjen $y = 1$, då $\theta \in]\pi, 2\pi[$ får vi kurvan, som skär sig själv i origo, bildar en ögla och som finns under linjen $y = 1$. Uppgifterna 3 och 4 handlar om denna konkoid.



3. Beräkna arean innanför öglan hos den undre delen av konkoiden $r = h(\theta) = 2 + \frac{1}{\sin\theta}$ (skuggad i figuren ovan).

4. Den övre delen av konkoiden har två inflektionspunkter, där $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ och kurvan växlar från konvex till konkav (markerade i figuren ovan).
a) Visa att dessa två inflektionspunkter, där $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, fås ur ekvationen $(h(\theta))^2 + 2(h'(\theta))^2 = h(\theta)h''(\theta)$ för konkoiden $r = h(\theta)$. (4p.)
b) Visa att detta motsvarar de θ-värden, för vilka $2\sin^3\theta + 3\sin^2\theta = 2$ för vår konkoid $r = h(\theta) = 2 + \frac{1}{\sin\theta}$ (Formeln i a)-delen får användas fritt, även om a)-delen inte lösts. De två inflektionspunkterna är ungefär $(x, y) = (\pm 2.6, 2.4)$.) (2p.)

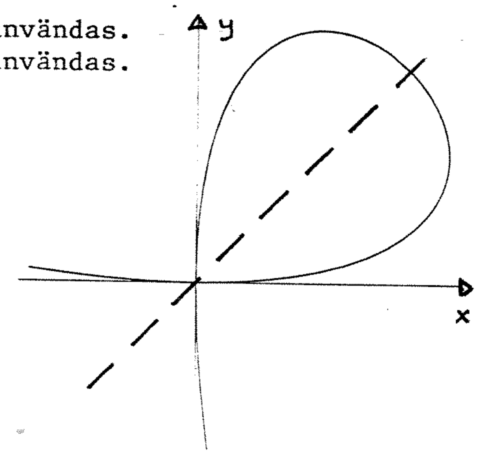
Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
$\frac{d}{d\alpha}(\sin\alpha) = \cos\alpha$, $\frac{d}{d\alpha}(\cos\alpha) = -\sin\alpha$, $\frac{d}{d\alpha}(\tan\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\frac{d}{d\alpha}(\cot\alpha) = -\frac{1}{\sin^2\alpha}$,
$\frac{d}{d\alpha}\left(\ln\left|\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|\right) = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\frac{d}{d\alpha}\left(\ln\left|\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|\right) = \frac{1}{\sin\alpha}$

Mat.-1.452 Grundkurs i matematik 2, **Metsalo**
Mellanförhör nr 1, 2003-02-24

Texta på varje papper
- **studieperiod, datum**
- **studiekortets nr+bokst., släktnamnet understreckat, alla förnamn**
- **utbildningsprogram (AUT,TFY,TIK,TUO,SÄH,KON,KEM,MAK,PUU,MAA,RYK)**
- **eventuella tidigare namn och utbildningsprogram**
- **komplettera med namnteckning**

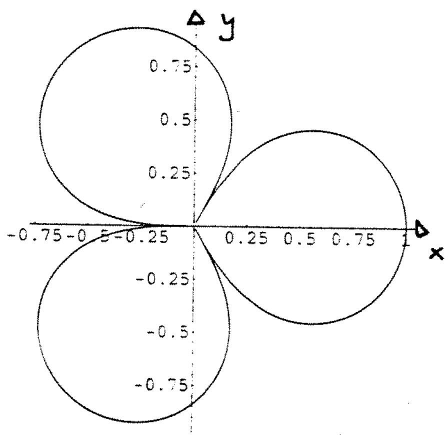
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. Kurvan $\bar{r}(t) = t(6-t)^2\bar{i} + t^2(6-t)\bar{j}$ är skissad i figuren till höger. Kurvan är symmetrisk med avseende på linjen $x = y$ och skär sig själv i origo (motsvarande parametervärdena $t = 0$ och $t = 6$), där den också tangerar koordinataxlarna.



a) Bestäm ekvationen för kurvans tangentlinje i punkten, som svarar mot parametervärdet $t = 1$.
b) Förutom i origo har kurvan vertikal tangent också i en annan punkt. Bestäm denna andra punkt.
c) Vi vill beräkna volymen hos kroppen som uppstår, då öglan hos kurvan roterar kring x-axeln. Sätt upp integralen, som ger denna volym på en sådan form, att den sedan enkelt kan beräknas mha. t.ex. Mathematica. Själva volymen behöver inte beräknas. ($V = 839808\pi/35$)

2. Kurvan $r(\theta) = (\frac{1}{2}(1+\cos(3\theta)))^{1/4}$ på polär form ger treklövern i figuren till höger. Beräkna den sammanlagda arean hos de tre klöverbladen. (Utnyttja symmetrin.)



3a) Bestäm konvergensradien R hos potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^k = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$$

b) Bestäm en övre och en undre gräns för talserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot 1^k = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots$$

Gränserna får gärna vara grova, men skall vara motiverade.

c) Dito för talserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (-1)^k = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

4. Bestäm längden hos rymdkurvan $\bar{r}(t) = 3t\bar{i} + 3t^2\bar{j} + 2t^3\bar{k}$ från punkten $(-3,3,-2)$ till punkten $(6,12,16)$.

Nyttiga formler: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$,
$\sin(2t) = 2\sin t\cos t$, $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$