

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Tentamen 20:edag Knut, 2006

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni tenterar!

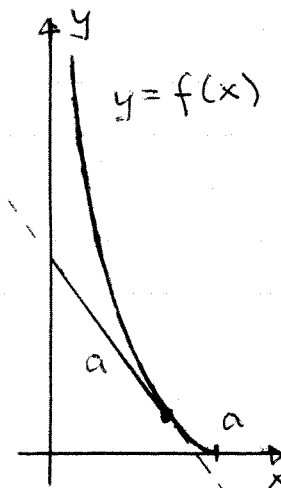
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.

Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

- $z_1 = 2 - i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Skriv $(\bar{z}_1 + z_2)/(z_1 + \bar{z}_2)$ på formen $a + bi$.
 - $w = (1 - i)/\sqrt{2}$. Skriv w^{2006} på formen $a + bi$.
- Vad menas med att en mängd vektorer i ett reellt vektorrum är linjärt oberoende?
 - Undersök om de fyra vektorerna $\vec{a} = [1, 1, 0, 0]$, $\vec{b} = [0, 1, 1, 0]$, $\vec{c} = [0, 0, 1, 1]$ och $\vec{d} = [1, 0, 0, 1]$ i vektorrummet \mathbf{R}^4 är linjärt oberoende eller inte.
 - Kan $\vec{x} = [1, 3, 0, 1]$ skrivas som en linjär kombination av \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} och \vec{d} ? Motivera.
- Vi approximerar talet $\sqrt[3]{11} (\approx 2.2239801)$. För detta inför vi hjälpfunktionen $g(x) = x^3 - 11$, som ju har ett nollställe i $x = \sqrt[3]{11}$ och approximerar detta nollställe med hjälp av Newtons metod (även känd som Newton-Raphsons metod). Börja med begynnelsevärdet $x_0 = 2 (= \sqrt[3]{8})$ och iterera två gånger, dvs. beräkna iteraten x_1 och x_2 . (Det räcker med ett uttryck med enbart tal för x_2 . Uttrycket behöver inte förenklas.)

- Visa att funktionen $f(x) = a \cdot \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. (2p.)
 - Kurvan $y = f(x)$ med f från a)-delen kallas för en *traktris*, men är mera känd under namnet hundkurvan. Den uppstår då man går längs en rät linje (styrlinjen, y -axeln i den övre fig. t.h.) och släpar en motsträvig hund efter sig i ett koppel med längden a . Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som begränsas av tangeringspunkten och y -axeln alltid har längden a . (4p.)



- Låt f och g vara två funktioner, definierade, kontinuerliga och strängt växande i intervallet $[a, b]$ sådana att $f(a) = g(a) = c > 0$, $f(b) = g(b) = d$ och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$ som i den nedre figuren till höger. Då har f och g inversfunktionerna f^{-1} resp. g^{-1} , som är def., kont. och str. växande i intervallet $[c, d]$ sådana att $f^{-1}(c) = g^{-1}(c) = a$, $f^{-1}(d) = g^{-1}(d) = b$ och $g^{-1}(y) > f^{-1}(y)$ för $c < y < d$.

Då det i figuren skuggade området, som begränsas av kurvorna $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ och $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$, roterar kring x -axeln, uppstår en rotationssymmetrisk kropp. Tvärsnittsmetoden ger att dess volym är $V_1 = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$, medan metoden med cylindriska skal ger att volymen är $V_2 = \int_c^d 2\pi y(g^{-1}(y) - f^{-1}(y)) dy$. Dessa två integraler borde naturligtvis ge samma värde, eftersom det ju rör sig om en och samma volym. Visa att $\int_c^d 2\pi y(g^{-1}(y) - f^{-1}(y)) dy = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$. (Gott råd: använd variabelsubstitution och partiell integrering.)

