Aalto-universitetet

Gripenberg

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tentamen och mellanförhörsomtagning, 10.1.2013

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 3, 6, 8, 9 och 11.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1.

(a) Skriv det komplexa talet $\dfrac{4+7\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ i formen $a+b\mathrm{i}$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Vad är det komplexa konjugatet av $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\pi\mathrm{i}}$?

Lösning: (a) Genom att förlänga med nämnarens konjugat får vi

$$\frac{4+7\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(4+7\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{2^2+1^2} = \frac{8-4\mathrm{i}+14\mathrm{i}+7}{5} = \frac{15+10\mathrm{i}}{5} = 3+2\mathrm{i}.$$

(b) Eftersom $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\pi\mathrm{i}} = \cos(\frac{5}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{2}\pi) = \cos(2\pi+\frac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi+\frac{1}{2}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi) = \mathrm{i}$ är konjugatet $-\mathrm{i}$.

---

2. Skär normalen till planet $x+2y+3z=2$ i punkten $(3,-2,1)$ x-axeln och om den gör det i vilken punkt?

Lösning: Planets normal är $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ och linjens ekvation blir därför $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}+t(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$. Om denna linje skär x-axeln så finns det ett tal t så att $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}+t(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = x\mathbf{i}$. Detta betyder att

$$\begin{aligned} 3+t &= x \\ -2+2t &= 0 \\ 1+3t &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $t=1$ men då kan inte den tredje ekvationen gälla vilket betyder att linjen ifråga inte skär x-axeln.

---

3. Bestäm alla lösningar till följande ekvationssystem med hjälp av Gauss algoritm:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & & +6x_4 & = & 8 \\ -4x_1 & -7x_2 & +2x_3 & -12x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & +7x_2 & +6x_3 & +8x_4 & = & 30 \\ -4x_1 & -9x_2 & -2x_3 & -8x_4 & = & -28 \end{array}$$

Lösning: Med hjälp av Gauss algoritm får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -12 & -8 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 30 \\ -4 & -9 & -2 & -8 & -28 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom den sista raden endast består av nollor kan den lämnas bort. Den tredje raden ger ekvationen $2x_4 = -2$ vilket innebär att $x_4 = -1$. Eftersom det inte finns något pivot-element i den tredje kolumnen kan x_3 väljas fritt och vi skriver $x_3 = s$. Den andra raden ger ekvationen $x_2 + 2x_3 = 8$ vilket ger $x_2 = 8 - 2s$. Den första raden ger ekvationen $2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 8$ vilket ger $x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_4 = 4 - 16 + 4s + 3 = -9 + 4s$. Lösningen kan alltså skrivas i formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

4. Antag att A och B är $n \times n$ matriser så att ingendera av dem är nollmatriser men $AB = 0$. Förklara varför det följer av detta att $\det(A) = \det(B) = 0$.

Lösning: Om $\det(A) \neq 0$ så är A inverterbar och $0 = A^{-1}0 = A^{-1}AB = IB = B$ vilket är en motsägelse eftersom vi antog att $B \neq 0$. På motsvarande sätt får vi om $\det(B) \neq 0$ att B är inverterbar och därför $0 = 0B^{-1} = ABB^{-1} = A$ vilket är en motsägelse eftersom $A \neq 0$. Detta innebär att $\det(A) = \det(B) = 0$.

---

5. Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}$ egenvärden och egenvektorer.

Lösning: Först löser vi den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (-10 - \lambda) & -6 \\ 18 & (11 - \lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Som lösningar får vi,

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{cases} 2, \\ -1, \end{cases}$$

av vilket vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$.

I nästa steg räknar vi ut en egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_1 = 2$ dvs. vi löser ekvationen $(A - 2I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -12 & -6 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{3}{2} r_1 \\ \sim &\begin{bmatrix} -12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $-12x_1 - 6x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -\frac{1}{2}$. Som egenvektor kan vi alltså välja $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, eller lika väl $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

En egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_2 = -1$ kan vi räkna ut på samma sätt, dvs. vi löser ekvationen $(A + I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 18 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ \sim &\begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $-9x_1 - 6x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -\frac{2}{3}$. Som egenvektor kan vi alltså välja $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, eller lika väl $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

---

6. Antag att punkterna $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2, \ldots, n$ är givna (och att $x_j \neq x_k$ då $j \neq k$) och man skall bestämma konstanterna c_1, c_2 och c_3 så att summan $\sum_{j=1}^{n} |c_1 \mathrm{e}^{x_j} + c_2 + c_3 \mathrm{e}^{-x_j} - y_j|^2$ är så liten som möjligt. Bestäm en matris A så att lösningen är $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} Y$ där $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Lösning: Om $c_1 \mathrm{e}^{x_j} + c_2 + c_3 \mathrm{e}^{-x_j} - y_j = 0$ då $j = 1, 2, \ldots, n$ så är $X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ en lösning till ekvationssystemet $AX = Y$ där

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x_1} & 1 & \mathrm{e}^{-x_1} \\ \mathrm{e}^{x_2} & 1 & \mathrm{e}^{-x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{x_n} & 1 & \mathrm{e}^{-x_n} \end{bmatrix}.$$

Nu kan man inte vänta sig att det finns en lösning till detta ekvationssystem men man kan minimera längden av vektorn $\|AX - Y\|^2$ och det är precis vad som sägs i uppgiften att man gör. Om man gör detta kommer minimivärdet att uppnås då $X = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y$ (eftersom $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y$ är projektionen av Y på A:s bildrum).

---

7. Utnyttja resultatet $3^3 = 27$ för att med linjär approximation uppskatta $\sqrt[3]{30}$.

Lösning: Om $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ så är $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}$ och linjär approximation innebär att $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$. I detta fall väljer vi $x = 27$ och $h = 3$ så att

$$\sqrt[3]{30} \approx f(27) + f'(27)\cdot 3 = \sqrt[3]{27} + \frac{3}{3}\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} + \frac{1}{3^2} = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}.$$

---

8. Om man löser ekvationen $f(x) = 0$, där f är en viss två gånger deriverbar funktion, med hjälp av Newton-Raphsons metod så får man som resultat följande värden för punkterna x_n, $n = 0, 1, \ldots, 7$:

```
-2.0100  -2.0075  -2.0056  -2.0042  -2.0032
     -2.0024  -2.0018  -2.0013
```

Det ser alltså ut som om $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Vad kan du säga om $f(-2)$, $f'(-2)$ och $f''(-2)$? Motivera dina svar!

Lösning: Om $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar så är $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ om inte $\lim_{n\to\infty}|f'(x_n)| = \infty$ vilket inte kan vara fallet här. Därför kan vi dra slutsatsen att $f(2) = 0$.

Om nu $f'(2) \neq 0$ så skulle talen x_n konvergera väldigt snabbt mot 2 (eftersom f är två gånger kontinuerligt deriverbar). Eftersom det inte ser så ut kan vi dra slutsatsen att $f'(2) = 0$ eller åtmintone mycket nära 0.

Beträffande $f''(-2)$ kan man inte säga någonting med stöd av de givna uppgifterna.

---

9. Använd partiell integrering för att räkna ut integralen $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Lösning: Med partiell integrering får vi

$$\begin{aligned}\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big/_{0}^{2}\, t\big(-\mathrm{e}^{-t}\big) - \int_0^2 1\cdot\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\mathrm{e}^{-2} - 0 + \int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-2} - \Big/_{0}^{2}\,\mathrm{e}^{-t} = -2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-2} + 1 = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

---

10. Beträffande funktionen f känner man till följande värden:

x	$f(x)$
1	0.4
1.4	0.6
1.6	0.6
2	1.0
2.4	0.8
3	0.6

Bestäm, på något förnuftigt sätt, en uppskattning av $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. Observera att avstånden mellan de givna x-värdena inte alla är lika stora!

Lösning: Om vi använder trapetsmetoden approximerar vi funktionen med en funktion som är bitvis linjär och som går genom de givna punkterna och sedan räknar vi ut integralen av denna funktion. Resultatet blir

$$\int_a^b f(x)\,dffx \approx \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\tfrac{1}{2}(f(x_j) + f(x_{j-1})),$$

så att i detta fall får vi

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx (1.4-1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(0.4+0.6) + (1.6-1.4)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(0.6+0.6)+$$
$$(2-1.6)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(0.6+1.0) + (2.4-2)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(1.0+0.8) + (3-2.4)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(0.8+0.6)$$
$$0.4\cdot 0.5 + 0.2\cdot 0.6 + 0.4\cdot 0.8 + 0.4\cdot 0.9 + 0.6\cdot 0.7 = 0.2 + 0.12 + 0.32 + 0.36 + 0.42 = 1.42.$$

11.

(a) Lös ekvationen $y'(t) + 2y(t) = 6$, $y(0) = 2$.
(b) Lös ekvationen $y''(t) - 6y(t) + 9y(t) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

Lösning: (a) Man kan lösa ekvationen på olika sätt, ett är att skriva lösningen i formen

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}y(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-2(t-s)}6\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-2t}2 + \mathrm{e}^{-2t}\Big/_0^t 3\mathrm{e}^{2s}$$
$$= \mathrm{e}^{-2t}2 + \mathrm{e}^{-2t}\big(3\mathrm{e}^{2t} - 3\big) = 3 - \mathrm{e}^{-2t}.$$

(b) Den karakteristiska ekvationen (som man erhåller genom att sätta in $y(t) = c\mathrm{e}^{rt}$) är

$$3^2 - 6r + 9 = 0,$$

och lösningarna är

$$r = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3.$$

Eftersom $r_1 = r_2$ är den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2 t\mathrm{e}^{3t}.$$

Av villkoret $y(0) = 3$ följer att $3 = c_1 + c_2\cdot 0$ vilket betyder att $c_1 = 3$.

Eftersom $y'(t) = 3c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + 3c_2t\mathrm{e}^{3t}$ så betyder villkoret $y'(0) = 4$ att $4 = 3c_1 + c_2$ vilket ger $c_2 = 4 - 9 = -5$. Lösningen är alltså $y(t) = 3\mathrm{e}^{3t} - 5t\mathrm{e}^{3t}$.

---

12. Behållaren A innehåller 20 liter och behållaren B 40 liter saltvatten. Vid tidpunkten $t = 0$ är salthalten i behållaren A 2 g och i behållaren B 4 g salt per liter vätska. Till behållaren A pumpas med hastigheten 3 liter per minut vatten som innehåller 4 g salt per liter och 1 liter per minut från behållaren B. Vätskan i behållaren A blandas och 4 liter vätska pumpas per minut över till behållaren B. Till behållaren B pumpas också 1 liter rent vatten per minut, och av den väl blandade vätskan pumpas 1 liter per minut tillbaka till behållaren A och 4 liter per minut pumpas ut.

(a) Ge ett differentialekvationssytem ur vilket man kan lösa saltmängderna i behållarna, (men du behöver inte lösa systemet).

(b) Bestäm gränsvärdena av saltmängderna då $t \to \infty$ (men du kan anta att saltmängderna har gränsvärden).

Lösning: Låt $x(t)$ vara saltmängden i behållaren A och $y(t)$ saltmängden i behållaren B vid tidpunkten t. Eftersom vätskemängderna hela tiden förblir oförändrade så är salthalterna $x(t)/20$ och $y(t)/40$ (g/l). Differentialekvationssystemet blir därför

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{20}4 + \frac{y(t)}{40}1 + 3 \cdot 4, \quad x(0) = 40,$$

$$y'(t) = \frac{x(t)}{20}4 - \frac{y(t)}{40}(1+4), \quad y(0) = 160.$$

Om vi skriver ekvationen i formen $Y'(t) + AY(t) = F(t)$ så blir koefficentmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{40} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

och

$$F(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Om lösningarna har gränsvärden (vilket de har om A:s egenvärden har positiv reell del vilket är fallet här) så gäller

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{40} - \frac{1}{200}} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{5}{4} \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 120 \end{bmatrix}.$$