Aalto-universitetet

Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tentamen och mellanförhörsomtagning 12.1.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 4, 6, 8, 10 och 11.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1.

(a) Antag att $w = 3 - \mathrm{i}$. Skriv det komplexa talet $\dfrac{\overline{w} + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$ i formen $a + \mathrm{i}b$.

(b) Skriv de komplexa talen $\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}$ och $\mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}}$ i formen $a + \mathrm{i}b$.

Lösning: (a) Eftersom $\overline{w} = 3 + \mathrm{i}$ får vi

$$\frac{\overline{w} + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{3 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = 3\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = 3\frac{(1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{1 + 1} = \frac{3}{2}(1 + 2\mathrm{i} - 1) = 3\mathrm{i}.$$

(b) Eftersom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ får vi

$$\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}} = \cos(-3\pi) + \mathrm{i}\sin(-3\pi) = -1,$$

och

$$\mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}} = \cos(6\pi) + \mathrm{i}\sin(6\pi) = 1.$$

---

2. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrrrcr}
-x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -6x_4 & = & -3 \\
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & 3 \\
3x_1 & +4x_2 & -x_3 & +10x_4 & = & 9 \\
2x_1 & & +2x_3 & +4x_4 & = & 6
\end{array}$$

med hjälp av Gauss algoritm.

Lösning: Med hjälp av Gauss eliminationsmetod får vi

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 10 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 3r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 4r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 4r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi nu väljer $x_3 = s$ och $x_4 = t$ så får vi lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

3. Antag att A och B är två $m \times m$-matriser så att ingendera av dem är nollmatrisen men $AB = 0$. Förklara varför det följer av detta att $\det(A) = \det(B) = 0$. Följer det av villkoret $AB = 0$ att också $BA = 0$? (Visa detta eller ge ett motexempel.)
Ledning: Om tex. $\det(A) \neq 0$ *så är* A *......*

Lösning: Om tex. $\det(A) \neq 0$ så är A inverterbar och då kan vi multiplicera båda sidorna av $0 = AB$ från vänster med A^{-1} så att

$$0 = A^{-1}0 = A^{-1}AB = IB = B,$$

vilket är en motsägelse eftersom vi antog att $B \neq 0$. Om $\det(B) \neq 0$ så är B inverterbar och vi kan på samma sätt visa att $A = 0$ genom att multiplicera båda sidorna av $0 = AB$ från höger med B^{-1} och vi får också i detta fall en motsägelse. Detta innebär att $\det(A) = \det(B) = 0$.

Om man väljer $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ så gäller naturligtvis $A \neq 0$ och $B \neq 0$ och också

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{men} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

---

4. Den reella och symmetriska 2×2-matrisen A har determinanten 0, egenvärdet -5 och motsvarande egenvektor är $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vad är det andra egenvärdet, motsvarande egenvektor och vad är A?
Ledning: Om du inte lyckas bestämma det andra egenvärdet och motsvarande egenvektor kan du förklara hur du kunde bestämma A *om du kände till alla egenvärden och egenvektorer.*

Lösning: Eftersom A är en 2×2-matris har den 2 egenvärden av vilka ett är -5. Determinanten är produkten av egenvärdena och därför måste det andra egenvärdet vara 0. Eftersom matrisen är reell och symmetrisk är egenvektorer som hör till olika egenvärden vinkelräta mot varandra vilket innebär att en egenvektor för egenvärdet 0 är $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Om vi nu bildar matrisen V med egenvektorerna som kolumner, dvs. $V = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ så gäller

$$A = V \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{9+16} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}.$$

5.

(a) Är $\sup(A \cap B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$?

(b) Uppnår funktionen $\dfrac{2}{(x-1)(2-x)}$ ett största och/eller minsta värde i intervallet $(1,2)$?

Motivera dina svar!

Lösning: (a) Påståendet gäller inte för om tex. $A = \{0,1\}$ och $B = \{0,2\}$ så är $\sup(A \cap B) = \sup(\{0\}) = 0$ men $\sup(A) = 1$ och $\sup(B) = 2$ så $\min\{\sup(A), \sup(B)\} = 1 > 0$.

(b) Låt $f(x) = \frac{2}{(x-1)(2-x)}$. Eftersom $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ men $f(x) < \infty$ för alla $x \in (1,2)$ uppnår f inte sitt största värde. Att funktionen uppnår sitt minsta värde följer av att den är kontinuerlig i intervallet $(0,1)$ och av att det också gäller $\lim_{x \to 2-} f(x) = +\infty$. Dessutom är det ganska enkelt att se att $f(x) \geq f(\frac{3}{2})$ eftersom funktionen $(x-1)(2-x)$ uppnår siit största värde i punkten $\frac{3}{2}$.

---

6. En stege som är 4 m lång stor lutad mot en lodrät vägg så att den nedre ändan av stegen befinner sig 1 m från väggen. Uppskatta med hjälp av linjär approximering och Pytagoras teorem hur mycket närmare väggen den nedre ändan av stegen skall flyttas om man vill att den övre ändan av stegen skall komma 2 cm högre upp.

Lösning: Om x är avståndet från nedre ändan av stegen till väggen och $y(x)$ är höjden över golvet av den övre ändan så gäller $x^2 + y(x)^2 = 4^2 = 16$. Om vi deriverar med avseende på x får vi $2x + 2y(x)y'(x) = 0$ eller $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$. Nu vill vi att $0.02 = y(x - \Delta x) - y(x)$ vilket innebär att

$$0.02 \approx -y'(x)\Delta x = \frac{x \Delta x}{y(x)},$$

och vi får

$$\Delta x \approx \frac{0.02 \cdot y(x)}{x} = \frac{0.02 \cdot \sqrt{16-1}}{1} = 0.02 \cdot \sqrt{15} \approx 0.08,$$

vilket betyder att de nedre ändan skall flyttas ca. 3 cm närmare väggen.

---

7. När man skulle lösa ekvationen $f(x) = 0$, där f är åtminstone två gånger kontinuerligt deriverbar, med hjälp av Newton-Raphsons metod och startvärdet $x_0 = 3.2$ fick man följande resultat:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.13333333333333 & x_2 = 3.08888888888889 & x_3 = 3.05925925925926 \\ x_4 = 3.03950617283951 & x_5 = 3.02633744855967 & x_6 = 3.01755829903978 \\ x_7 = 3.01170553269319 & x_8 = 3.00780368846212 & x_9 = 3.00520245897475 \\ x_{10} = 3.00346830598317 & x_{11} = 3.00231220398878 & x_{12} = 3.00154146932585. \end{array}$$

Det ser ut som om $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ men vilka slutsatser kan man av dessa resulat dra om hur funktionen f uppför sig i närheten av punkten 3? Förklara hur du resonerat!

Lösning: Eftersom f är två gånger deriverbar kan man vara säker på att $|f'(x_n)|$ inte går mot ∞ då $x_n \to 3$ och eftersom $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x-n)}{f'(x_n}$ och $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ så gäller $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, dvs. $f(3) = 0$. Men om $f'(3) \neq 0$ skulle var 0 borde man vänta sig att konvergensen skulle vara mycket snabbare i slutet så det ser ut som om $f'(3) = 0$.

8.

(a) En vattentank innehåller 40 liter saltvatten i vilket det finns 2 g salt per liter vid tidpunkten $t = 0$. Till tanken pumpas med en hastighet av 3 liter per minut saltvatten som innehåller $\frac{1}{1+t}$ g salt per liter vid tidpunkten t. Av den väl omrörda blandningen pumpas 3 liter per minut ut (så att vätskemängden i behållaren hålls oförändrad). Låt $y(t)$ vara den totala mängden salt i behållaren vid tidpunkten t. Bestäm $y(0)$ och bestäm den differentialekvation som uppfylls av $y(t)$ (dvs. förklara hur du kommit fram till den). Du behöver inte lösa differentialekvationen.

(b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0$$

Lösning: (a) Eftersom det vid tidpunkten $t = 0$ finns 2 g salt per liter i vattnet och tanken innehåller 40 liter blir den totala saltmängden $2 \cdot 40 = 80$ g, så att $y(0) = 80$.

Låt nu Δt vara ett så kort tidsintervall att saltkoncentrationen och vätskemängden i behållaren inte ändras i någon väsentlig utsträckning. Vid tidpunkten t är saltkoncentrationen $\dfrac{y(t)}{40}$ och det betyder att det mellan t och Δt kommer in $\frac{1}{1+t} \cdot 3 \cdot \Delta t$ g salt och rinner ut $\dfrac{y(t)}{40} \cdot 3 \cdot \Delta t$ g salt så att

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx \frac{1}{1+t} \cdot 3 \cdot \Delta t - \frac{y(t)}{40} \cdot 3 \cdot \Delta t.$$

Om vi nu dividerar med Δt och tar gränsvärdet då $\Delta t \to 0$ så får vi ekvationen

$$y'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{3}{40} y(t), \quad t \geq 0.$$

med intialvärdet $y(0) = 80$.

(b) Den karakateristiska ekvationen (som man erhåller genom att sätta in $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$) är

$$r^2 + 7r + 12 = 0,$$

och den har lösningarna

$$r = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 124} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} -3, \\ -4. \end{cases}$$

Den allmänna lösningen är därför

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_{|} 2\mathrm{e}^{-4t}.$$

---

9. Beräkna Laplace-transformen, dvs. integralen $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$, av funktionen f där $f(t) = t$ då $0 \le t \le 1$ och $f(t) = 0$ annars.
Ledning: Ett sätt är att integrera partiellt två gånger men man kan också tex. använda den andra förskjutningsregeln.
Lösning: Med hjälp av partiell integrering får vi

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st} t\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \left(-\frac{1}{s}\right) \mathrm{e}^{-st} t - \int_0^1 \left(-\frac{1}{s}\right) \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s} + \Big/_0^1 \left(-\frac{1}{s^2}\right) \mathrm{e}^{-st} = -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s} - \frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-s} + \frac{1}{s^2}.$$

Ett annat sätt är att skriva $f(t) = tu(t) - tu(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$ där $u(t) = 1$ då $t > 0$ och 0 annars. Eftersom Laplace-transformen av t är $\frac{1}{s^2}$ blir Laplace-transforem av f enligt den andra förskjutningsregeln

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2} - \mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s^2} - \mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s}.$$

---

10. Beträffande en kontinuerlig funktion $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ känner man till följande värden:

x	2	2.4	2.8	3.0	3.2	3.6	4
f(x)	2.1	1.9	1.5	1.7	1.9	2.5	2.5

Hur kan man bestämma ett närmevärde för $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$? Observera att avstånden mellan de givna punkterna på x-axeln inte är lika långa. Du behöver inte räkna ut ett slutligt värde men ge ett uttryck som man enkelt kunde räkna ut med hjälp av en räknare.
Lösning: Man kan använda tarpetsmetoden som innebär att man approximerar integralen $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x$ med $\frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1})$ och sedan räknar summan av integralerna över delintervallen. Det ger resultatet

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1}),$$

om $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. I detta fall får vi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{1}{2}(2.1 + 1.9) \cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}(1.9 + 1.5) \cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}(1.5 + 1.7) \cdot 0.2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1.7 + 1.9) \cdot 0.2 + \tfrac{1}{2}(1.9 + 2.5) \cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}(2.5 + 2.5) \cdot 0.4$$
$$= 2.0 \cdot 0.4 + 1.7 \cdot 0.4 + 1.6 \cdot 0.2 + 1.8 \cdot 0.2 + 2.2 \cdot 0.4 + 2.5 \cdot 0.4.$$

---

11. Antag att $y(t)$ är lösningen till ekvationen $y'(t) + 3y(t-2) = 1$ och $y(t) = -1$ då $t \leq 0$. Bestäm Laplace-transformen av $y(t)$.
Ledning: Då man räknar Laplace-transformen av termen $3y(t-2)$ kan det vara skäl att dela upp integralen i två delar, den ena kan man räkna ut direkt eftersom $y(t) = -1$ då $t \leq 0$ och den andra kommer att innehålla Laplace-transformen av $y(t)$.

Lösning: Låt $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. Då är $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) + 1$. Enligt definitionen och antagandet att $y(t) = -1$ då $t \leq 0$ är

$$\mathcal{L}(3y(t-2))(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} 3y(t-2)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \mathrm{e}^{-st}(-3)\,\mathrm{d}t + 3\int_2^\infty \mathrm{e}^{-st} y(t-2)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^2 \frac{3}{s}\mathrm{e}^{-st} + 3\mathrm{e}^{-2s}\int_2^\infty \mathrm{e}^{-s(t-2)} y(t-2)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{s}\left(\mathrm{e}^{-2s} - 1\right) + 3\mathrm{e}^{-2s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{3}{s}\left(\mathrm{e}^{-2s} - 1\right) + 3\mathrm{e}^{-2s} Y(s).$$

Eftersom dessutom $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$ så får vi då vi tar Laplace-transformen av båda sidorna i ekvationen

$$sY(s) + 1 + \frac{3}{s}\left(\mathrm{e}^{-2s} - 1\right) + 3\mathrm{e}{-2s}Y(s) = \frac{1}{s},$$

så att

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\frac{1}{s} + \frac{3}{s}(1 - \mathrm{e}^{-2s}) - 1}{s + 3\mathrm{e}^{-2s}}.$$

---

12. Om du skall räkna mod $(983^{567}, 1517)$ och i `Matlab/Octave` ger kommandot `mod(983^567,1517)` får du som svar `NaN`. Förklara hur man kan räkna ut mod $(983^{567}, 1517)$ så att man i varje steg bara behöver räkna ut mod $(n, 1517)$ där n är något tal mellan 0 och $3 \cdot 10^6$. Du skall **inte** utföra räkningarna.

Lösning: En möjlighet är att låta $x_1 = 983$ och sedan i tur och ordning räkna $x_2, \ldots, x_{567}$ så att $x_{j+1} =$ mod $(983 \cdot x_j, 1517)$. Ett annat, effektivare sätt är att räkna ut talen $y_j =$ mod $(983^{(2^j)}, 1517)$ genom att låta $y_0 = 983$ och sedan räkna $y_{j+1} =$ mod $(y_j^2, 1517)$ för $j = 0, 1, \ldots 8$. Eftersom $567 = 512 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1$ och kan vi sedan räkna $z_1 = 983$, $z_3 =$ mod $(y_1 \cdot z_1, 1517)$, $z_7 =$ mod $(y_2 \cdot z_3, 1517)$, $z_{23} =$ mod $(y_4 \cdot z_7, 1517)$, $z_{55} =$ mod $(y_5 \cdot z_{23}, 1517)$ och $z_{567} =$ mod $(y_9 \cdot z_{55}, 1517)$ och då blir $z_{567} =$ mod $(983^{567}, 1517)$.
