

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1

Mellanföreläsning 2, 19.11.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
*Räknare eller tabeller får **inte** användas i detta prov!*

1. (4p) Vektorn $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är en egenvektor för matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 11 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm

motsvarande egenvärde. Bestäm också något egenvärde för matrisen A^4 (men räkna inte ut denna matris).

2. (3p) En räkning med matlab/octave och 3×2 -matrisen A gav följande resultat:

```
> [U, S, V]=svd(A);
```

```
> S
```

```
S =
```

```
1.5986e+00      0
                0    9.8998e-17
                0      0
```

```
> V
```

```
V =
```

```
-0.74139    0.67107
-0.67107   -0.74139
```

Vad skulle kommandot `norm(A)` ge för resultat? Bestäm någon vektor $X \neq 0$ så att $AX \approx 0$.

3. (5p) Bestäm den räta linje som bäst beskriver datapunkterna $(2, 0)$, $(-1, 0)$ och $(-1, -3)$ så att alltså summan av kvadraterna av avstånden från punkterna till linjen är så liten som möjligt.

4. (2p) Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion och att $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Visa att det finns åtminstone en lösning till ekvationen $x \cos(x) + f(x) = 0$.

5. (3p) Talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bestäms av formeln $x_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}x_n^2$, $n \geq 0$, då x_0 är givet. Om gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existerar (och inte är $\pm\infty$) vad kan det vara? Visa att om man valt x_0 så att $|x_0| \leq 4$ så gäller $|x_n| \leq 4$ för alla $n \geq 0$. Följer det av detta att talföljden har ett gränsvärde?

6. (4p) Förklara hur man med Newton-Raphsons metod kan försöka bestämma en lösning till ekvationen $x^5 + 3x^4 = 2x^2 + 5x + 3$. Du behöver inte härleda den grundläggande formeln men skriv explicit ut den formel med vilken man skall räkna approximationerna. Välj något lämpligt startvärde x_0 som inte är 0 och räkna ut följande approximation x_1 .

7. (3p) Utnyttja resultatet $6^2 = 36$ för att med linjär approximation uppskatta $\sqrt{34}$.