Aalto-universitetet

Gripenberg/Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 2, 19.11.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (4p) Vektorn $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är en egenvektor för matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 11 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm motsvarande egenvärde. Bestäm också något egenvärde för matrisen A^4 (men räkna inte ut denna matris).

Lösning: En räkning visar att

$$AX = \begin{bmatrix} (8 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 3) \\ (11 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 3) \\ (12 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3X$$

så vi ser att egenvärdet är 3.

Om B har egenvärdet λ så har B^m egenvärdet λ^m då m är positivt (också negativt om B är inverterbar) så matrisen A^4 har egenvärdet $3^4 = 81$.

---

2. (3p) En räkning med `matlab/octave` och 3×2-matrisen A gav följande resultat:

```
> [U,S,V]=svd(A);
> S
S =
   1.5986e+00            0
            0   9.8998e-17
            0            0
> V
V =
  -0.74139   0.67107
  -0.67107  -0.74139
```

Vad skulle kommandot `norm(A)` ge för resultat? Bestäm någon vektor $X \neq 0$ så att $AX \approx 0$.

Lösning: Matrisens A singulärvärden är `1.5986e+00` och `9.8998e-17` och det större av dessa är A:s norm $\|A\|$ så kommandot `norm(A)` skulle ge som svar `1.5986`.

Det mindre singulärvärdet `9.8998e-17` är praktiskt taget 0, dvs. matrisen A har (med beaktande av avrundningsfel) bara ett positivt singulärvärde. Detta innebär att och om X väljs som den andra kolumnvektorn i V, dvs. $X = \begin{bmatrix} 0.67107 \\ -0.74139 \end{bmatrix}$ så blir $V^{\mathrm{T}}X \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ eftersom V är ortogonal och då blir $SV^{\mathrm{T}}X \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så att $AX = USV^{\mathrm{T}}X \approx 0$.

---

3. (5p) Bestäm den räta linje som bäst beskriver datapunkterna $(2, 0)$, $(-1, 0)$ och $(-1, -3)$ så att alltså summan av kvadraterna av avstånden från punkterna till linjen är så liten som möjligt.

Lösning: Först skall vi räkna ut medelvärdena av punkternas koordinater, och de blir

$$\overline{x} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} x(j) = 0 \quad \text{och} \quad \overline{y} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} y(j) = -1.$$

Nu byter vi ut punkterna (x_j, y_j) mot $(x_j - \overline{x}, y_j - \overline{y})$ och sätter in dem i en matris som då blir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nästa steg är att räkna ut (åtminsone en del av) singulärvärdesuppdelningen av A. Först räknar vi ut

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nu skall vi räkna ut denhär matrisens egenvärden och vi får först den karakteristiska ekvationen

$$\det(AA^{\mathrm{T}} - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (6-\lambda) & 3 \\ 3 & (6-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0.$$

Som lösningar får vi,

$$\lambda = 6 \pm \sqrt{36 - 27} = \begin{cases} 9, \\ 3, \end{cases}$$

av vilket vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = 9$ och $\lambda_2 = 3$.

I nästa steg räknar vi ut en egenvektor som hör till det största egenvärdet $\lambda_1 = 9$. dvs. vi löser ekvationen $(AA^{\mathrm{T}} - 9I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ \sim &\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $-3x_1 + 3x_2 = 0$ lösningen $x_1 = 1$. Vi kan till egenvektor alltså välja $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. I dethär fallet är det inte nödvändigt att normalisera egenvektorn så att den har längden 1. Den räta linjen vi sökt har alltså riktningsvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och därmed normalen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och går genom punkten $(0, -1)$ så att ekvationen blir $1 \cdot (x - 0) + (-1) \cdot (y - (-1)) = 0$ eller $x - y = 1$.

---

4. (2p) Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion och att $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Visa att det finns åtminstone en lösning till ekvationen $x\cos(x) + f(x) = 0$.

Lösning: Eftersom $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$ så finns det ett tal C så att $|f(x)| \leq C$. Om nu $n \geq 0$ är ett helta som är så stort att $x_1 = 2n\pi > C$ så är

$$x_1 \cos(x_1) + f(x_1) \geq 2n\pi \cdot 1 - C > 0$$

eftersom $f(x) \geq -C$ för alla x och $\cos(2n\pi) = 1$. På samma sätt ser vi att om $x_2 = (2n+1)\pi$ så är $x_2 > C$ och

$$x_2 \cos(x_2) + f(x_1) \leq (2n+1)\pi \cdot (-1) + C < 0$$

eftersom $f(x) \leq C$ för alla x och $\cos((2n+1)\pi) = -1$. Funktionen $x\cos(x) + f(x)$ är enligt antagandet kontinuerlig (eftersom $\cos$ är kontinuerlig) så av teckenbytessatsen följer att denna funktion har ett nollställe i intervallet $[x_1, x_2]$. Genom att välja n ännu större kan man visa att det finns oändligt många lösningar (men det hörde inte till uppgiften).

---

5. (3p) Talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bestäms av formeln $x_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}x_n^2$, $n \geq 0$, då x_0 är givet. Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar (och inte är $\pm\infty$) vad kan det vara? Visa att om man valt x_0 så att $|x_0| \leq 4$ så gäller $|x_n| \leq 4$ för alla $n \geq 0$. Följer det av detta att talföljden har ett gränsvärde?

Lösning: Funktionen $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x_n^2$ är kontinuerlig så **ifall** gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ existerar så gäller

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) = 4 - \frac{1}{2}a^2.$$

Denhär ekvationen kan också skrivas i formen $a^2 + 2a - 8 = 0$ och lösningarna är då

$$a = -1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 2, \\ -4. \end{cases}$$

De enda möjliga gränsvärdena är alltså 2 och -4.

Antag nu att $|x_0| \leq 4$. För att visa att $|x_n| \leq 4$ för alla $n \geq 0$ kan vi använda induktion och påståendet gäller enligt antagandet för $n = 0$. Antag att det också gäller då $n = k$. Eftersom $x_k^2 \geq 0$ gäller $x_{k+1} = 4 - \frac{1}{2}x_k^2 \leq 4$ och eftersom $|x_k| \leq 4$ så är $x_k^2 \leq 16$ så att $x_{k+1} = 4 - \frac{1}{2}x_k^2 \geq 4 - \frac{1}{2}16 = -4$ och vi har visat att $|x_{k+1}| \leq 4$ och är en följd av induktionsprincipen att $|x_n| \leq 4$ för alla $n \geq 0$.

Av det faktum att $|x_n| \leq 4$ följer inte i allmänhet att gränsvärdet skulle existera och i detta fall är det inte ens sant utom för vissa värden på x_0.

---

6. (4p) Förklara hur man med Newton-Raphsons metod kan försöka bestämma en lösning till ekvationen $x^5 + 3x^4 = 2x^2 + 5x + 3$. Du behöver inte härleda den grundläggande formeln men skriv explicit ut den formel med vilken man skall räkna approximationerna. Välj något lämpligt startvärde x_0 som inte är 0 och räkna ut följande approximation x_1.

Lösning: Om $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 5x - 3 = 0$ så är lösningar till ekvationen $f(x) = 0$ (förstås) lösningar till den ursprungliga ekvationen (och tvärtom). Enligt Newton-Raphsons metod skall vi räkna talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ där $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Eftersom $f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 4x - 5$ så får vi formeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + 3x_n^4 - 2x_n^2 - 5x_n - 3}{5x_n^4 + 12x_n^3 - 4x_n - 5} = \frac{4x_n^5 + 9x_n^4 - 2x_n^2 + 3}{5x_n^4 + 12x_n^3 - 4x_n - 5}.$$

Om vi väljer $x_0 = -1$ så blir

$$x_1 = -1 - \frac{-1+3-2+5-3}{5-12+4-5} = -1 - \frac{2}{-8} = -\frac{3}{4}.$$

---

7. (3p) Utnyttja resultatet $6^2 = 36$ för att med linjär approximation uppskatta $\sqrt{34}$.

Lösning: Om $f(x) = \sqrt{x}$ så är $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ och linjär approximation innebär att $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$. I detta fall väljer vi $x = 36$ och $h = -2$ så att

$$\sqrt{34} = f(34) \approx f(36) + f'(36)(-2) = \sqrt{36} + \frac{-2}{2\sqrt{36}} = 6 - \frac{1}{6} = \frac{35}{36}.$$
