Aalto-universitetet

Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 3 12.12.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (4p) Vilken integral får man som resultat om man i integralen $\int_0^2 \cos(\sqrt{t+3})\sin(t)\,\mathrm{d}t$ gör variabelbytet $\sqrt{t+3} = x$. Räkna inte ut integralen!

Lösning: Eftersom $\sqrt{t+3} = x$ så är $t+3 = x^2$ och $t = x^2 - 3$. Detta innebär att $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Då $t = 0$ är $x = \sqrt{3}$ och då $t = 2$ är $x = \sqrt{5}$. Den nya integralen blir därför

$$\int_0^2 \cos(\sqrt{t+3})\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \cos(x)\sin(x^2-3)2x\,\mathrm{d}x.$$

---

2. (3p) Gamma-funktionen definieras med $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ då $\alpha > 0$. Visa med hjälp av partiell integrering att $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ då $\alpha > 0$.

Lösning: Genom att integrera funktionen e^{-t} och derivera funktionen t^α får vi

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\alpha+1-1}\,\mathrm{d}t = \Big/_0^\infty \left(-\mathrm{e}^{-t}t^\alpha\right) - \int_0^\infty \left(-\mathrm{e}^{-t}\alpha t^{\alpha-1}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-t}t^\alpha\right) + \mathrm{e}^0 0^\alpha + \alpha\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = 0 + \alpha\Gamma(\alpha).$$

---

3. (4p) Beträffande en kontinuerlig funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ känner man till följande värden:

x	0	0.6	1.0	1.8	2.2	2.4	3
f(x)	1.2	1.4	1.0	1.2	0.8	0.6	0.6

Hur kan man bestämma ett närmevärde för $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$? Observera att avstånden mellan de givna punkterna på x-axeln inte är lika långa. Du behöver inte räkna ut ett slutligt värde men ge ett uttryck som man enkelt kunde räkna ut med hjälp av en räknare.

Lösning: Man kan använda tarpetsmetoden som innebär att man approximerar integralen $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x$ med $\frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1})$ och sedan räknar summan av integralerna över delintervallen. Det ger resultatet

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^n \frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1}),$$

om $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. I detta fall får vi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \tfrac{1}{2}(1.2+1.4)\cdot 0.6 + \tfrac{1}{2}(1.4+1.0)\cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}(1.0+1.2)\cdot 0.8 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(1.2+0.8)\cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}(0.8+0.6)\cdot 0.2 + \tfrac{1}{2}(0.6+0.6)\cdot 0.6 \\ &= 1.3\cdot 0.6 + 1.2\cdot 0.4 + 1.1\cdot 0.8 + 1.0\cdot 0.4 + 0.7\cdot 0.2 + 0.6\cdot 0.6.\end{aligned}$$

---

4. (4p) Antag att $y(t)$ är lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Bestäm Laplace-transformen av $y(t)$. Kom ihåg att $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$ och vad resultatet blir då en Laplace-transform deriveras. Räkna inte ut $y(t)$!

Lösning: Eftersom $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ så är också $\mathcal{L}(f'')(s) = s(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0)$. När vi tar Laplace-transformen av båda sidorna av ekvationen får vi (eftersom transforemn är linjär)

$$s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) + 4(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)) + 3\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(t)(s).$$

Eftersom $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$ så är $\mathcal{L}(-t)1)(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(1)(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}$ så vi ser att $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$. Eftersom $y(0) = 2$ och $y'(0) = -1$ så får vi

$$(s^2 + 4s + 3)\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s^2} + 2s - 1 + 4\cdot 2,$$

så att

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4s+3)} + \frac{7+2s}{s^2+4s+3}.$$

---

5. (3p) Funktionerna $\sin(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$ har Laplace-transformerna $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ och $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$. Vilken funktion har Laplace-transformen $\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}(s+2)}{s^2+9}$.

Ledning: Kom ihåg förskjutningsreglerna $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$ och $\mathcal{L}(u(t-a)f(t-a))(s) = \mathrm{e}^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$.

Lösning: Skriv först

$$\frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}.$$

Då kan vi använda den andra föskjutningsregeln för att konstatera att

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2s}(s+2)}{s^2+9}\right)(t) = u(t-2)\left(\cos(3(t-2)) + \frac{2}{3}\sin(3(t-2))\right).$$

---

6. (3p) Är det sant att om $x = d_k d_{k-1}\ldots d_1 d_0$ dvs. $x = d_k\cdot 10^k + \ldots + d_1\cdot 10^1 + d_0\cdot 10^0$ så är $\mathrm{mod}\,(x,3) = \mathrm{mod}\,(d_k + d_{k-1} + \ldots + \ldots d_1 + d_0, 3)$ dvs. $[x]_3 = [d_k + d_{k-1} + \ldots d_1 + d_0]_3$. Motivera ditt svar.

Lösning: Eftersom $10 = 3 \cdot 3 + 1$ är $[10]_3 = [1]_3$ och därför gäller $[10^j]_3 = [10]_3^j = [1]_3^j = [1^j]_3 = [1]_3$. Detta innebär att

$$\begin{aligned}[x]_3 = [d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0]_3 &= [d_k]_3 \cdot [10^k]_3 + \ldots + [d_1]_3 \cdot [10^1]_3 + [d_0]_3 \cdot [10^0]_3 \\ &= [d_k]_3 \cdot [1]_3 + \ldots + [d_1]_3 \cdot [1]_3 + [d_0]_3 \cdot [1]_3 = [d_k + d_{k-1} + \ldots d_1 + d_0]_3,\end{aligned}$$

vilket är detsamma som att mod $(x, 3) =$ mod $(d_k + d_{k-1} + \ldots d_1 + d_0, 3)$.

---

7. (3p) Använd Euklides algoritm för att bestämma den största gemensamma delaren av talen 85 och 55.

Lösning: I enlighet med Euklides algoritm räknar vi ut r_j, $j \geq 0$ så att $r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ då $j \geq 0$ och $0 \leq r_j < r_{j-1}$ med $r_0 = 85$ och $r_1 = 55$ och vi får

$$\begin{aligned}85 &= 1 \cdot 55 + 30 \\ 55 &= 1 \cdot 30 + 25 \\ 30 &= 1 \cdot 25 + 5 \\ 25 &= 5 \cdot 5 + 0\end{aligned}$$

Av detta ser vi att den största gemensamma delaren är 5.
