Aalto-universitetet

Gripenberg

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 2 15.11.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (3p) När man löser y som en funktion $y(x)$ av x ur ekvationen $x^3 + \mathrm{e}^{x+y} + \sin(x+y) = 0$ så får man (åtminstone) en lösning så att $y(-1) = 1$ Bestäm $y'(-1)$ för denna lösning.

2. (4p) Bestäm en approximation av talet $\sqrt[3]{65}$ genom att använda linjär approximation och det faktum att $4^3 = 64$.

3. (4p) Antag att $a > 0$. Om man vill beräkna $\ln(a)$ (dvs. $\log(a)$) genom att använda Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $\mathrm{e}^x = a$ så kommer man att beräkna en talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ där $x_{n+1} = g(x_n)$. Bestäm funktionen g. I vilket av intervallen $(-\infty, \ln(a))$, $[\ln(a), x_n)$ eller $[x_n, \infty)$ kommer x_{n+1} att ligga om $x_n > a$? Motivera ditt svar.

4. (4p) Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x) = 1 - \sqrt{|x|} + 2x^2$ då $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5. (3p) En vattentank innehåller 30 liter saltvatten i vilket det finns 3 g salt per liter vid tidpunkten $t = 0$. Till tanken pumpas med en hastighet av 2 liter per minut saltvatten som innehåller $1 + \sin(\pi t/10)$ g salt per liter vid tidpunkten t. Av den väl omrörda blandningen pumpas 2 liter per minut ut (så att vätskemängden i behållaren hålls oförändrad). Låt $y(t)$ vara den totala mängden salt i behållaren vid tidpunkten t. Bestäm $y(0)$ och bestäm den differentialekvation som uppfylls av $y(t)$ (dvs. förklara hur du kommit fram till den). Du behöver inte lösa differentialekvationen.

6. (3p) Matrisen $A = \begin{bmatrix} -5 & 1.5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena -2 och -4 och motsvarande egenvektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm lösningen till differentialekvationssystemet

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

7. (3p) Förklara varför funktionen $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ är integrerbar i intervallet $(0, \infty)$ utan att räkna ut integralen.