Aalto-universitetet

Gripenberg

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 2 15.11.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (3p) När man löser y som en funktion $y(x)$ av x ur ekvationen $x^3 + \mathrm{e}^{x+y} + \sin(x+y) = 0$ så får man (åtminstone) en lösning så att $y(-1) = 1$ Bestäm $y'(-1)$ för denna lösning.

Lösning: Funktionen $y(x)$ uppfyller ekvationen

$$x^3 + \mathrm{e}^{x+y(x)} + \sin(x + y(x)) = 0.$$

När man deriverar båda sidorna av ekvationen med avseende på x så får man

$$3x^2 + \mathrm{e}^{x+y(x)}(1 + y'(x)) + \cos(x + y(x))(1 + y'(x)) = 0.$$

Eftersom $y(-1) = 1$ så blir resultatet då man sätter in $x = -1$

$$3 + \mathrm{e}^0(1 + y'(-1)) + \cos(0)(1 + y'(-1)) = 0,$$

och eftersom $\mathrm{e}^0 = \cos(0) = 1$ så får man

$$y'(-1) = -\frac{5}{2}.$$

---

2. (4p) Bestäm en approximation av talet $\sqrt[3]{65}$ genom att använda linjär approximation och det faktum att $4^3 = 64$.

Lösning: Låt $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Då är $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3f(x)^2}$. Därför är $f(64) = 4$ och $f'(64) = \frac{1}{3\cdot 16} = \frac{1}{48}$. Med linjär approximation får vi därför

$$f(65) = f(64+1) \approx f(64) + f'(64)\cdot 1 = 4 + \frac{1}{48} = \frac{193}{48}.$$

---

3. (4p) Antag att $a > 0$. Om man vill beräkna $\ln(a)$ (dvs. $\log(a)$) genom att använda Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $\mathrm{e}^x = a$ så kommer man att beräkna en talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ där $x_{n+1} = g(x_n)$. Bestäm funktionen g. I vilket av intervallen $(-\infty, \ln(a))$, $[\ln(a), x_n)$ eller $[x_n, \infty)$ kommer x_{n+1} att ligga om $x_n > a$? Motivera ditt svar.

Lösning: Om $f(x) = \mathrm{e}^x - a$ så är $f(\ln(a)) = 0$. Newton-Raphsons metod bygger på att om man har en approximation x_n till nollstället så ersätter man kurvan $y = f(x)$ med tangenten till denna kurva i punkten $(x_n, f(x_n))$ och den nya approximationen är den punkt x_{n+1} där tangenten skär x-axeln. Detta innebär att $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ och eftersom $f'(x) = \mathrm{e}^x$ så får man i detta fall

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - a}{\mathrm{e}^{x_n}} = x_n - 1 + a\mathrm{e}^{-x_n},$$

så att $g(x) = x - 1 + a\mathrm{e}^{-x}$.

Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^x - a$ är konvex eftersom $f'(x) = \mathrm{e}^x$ och $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ vilket innebär att kurvan $y = f(x)$ ligger ovanför tangenten och därför skär tangenten x-axeln i en punkt som ligger till höger om nollstället $\ln(a)$. Eftersom $f'(x) > 0$ så är $f(x_n) > 0$ om $x_n > \ln(a)$ och då är också $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ vilket betyder att $x_{n+1} < x_n$. Av detta följer att $x_{n+1} \in [\ln(a), x_n)$.

---

4. (4p) Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x) = 1 - \sqrt{|x|} + 2x^2$ då $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Lösning: Funktionen är symmetrisk ($f(-x) = f(x)$) så man kan lika bra anta att $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Dessutom är den inte deriverbar i punkten 0, så detta faktum blir på detta sätt också automatiskt beaktat. Då $x > 0$ är

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x,$$

och villkoret $f'(x) = 0$ ger ekvationen $x\sqrt{x} = \frac{1}{8}$ vilket innebär att $x = \frac{1}{4}$. Detta innebär att vi skall beräkna värdet av funktionen i punkterna $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$ och $x = \frac{1}{2}$ och vi får

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

Av detta ser vi att det största värdet är 1 störst och det minsta $\frac{5}{8}$.

---

5. (3p) En vattentank innehåller 30 liter saltvatten i vilket det finns 3 g salt per liter vid tidpunkten $t = 0$. Till tanken pumpas med en hastighet av 2 liter per minut saltvatten som innehåller $1 + \sin(\pi t/10)$ g salt per liter vid tidpunkten t. Av den väl omrörda blandningen pumpas 2 liter per minut ut (så att vätskemängden i behållaren hålls oförändrad). Låt $y(t)$ vara den totala mängden salt i behållaren vid tidpunkten t. Bestäm $y(0)$ och bestäm den differentialekvation som uppfylls av $y(t)$ (dvs. förklara hur du kommit fram till den). Du behöver inte lösa differentialekvationen.

Lösning: Eftersom det vid tidpunkten $t = 0$ finns 3 g salt per liter i vattnet och tanken innehåller 20 lite blir den totala saltmängden $3 \cdot 30 = 90$ g, så att $y(0) = 30$.

Låt nu Δt vara ett så kort tidsintervall att saltkoncentrationen och vätskemängden i behållaren inte ändras i någon väsentlig utsträckning. Vid tidpunkten t är saltkoncentrationen $\frac{y(t)}{30}$ och det betyder att det mellan t och Δt kommer in $(1 + \sin(\pi t/10)) \cdot 2 \cdot \Delta t$ g salt och rinner ut $\frac{y(t)}{30} \cdot 2 \cdot \Delta t$ g salt så att

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx (1 + \sin(\pi t/10)) \cdot 2 \cdot \Delta t - \frac{y(t)}{30} \cdot 2 \cdot \Delta t.$$

Om vi nu dividerar med Δt och tar gränsvärdet då $\Delta t \to 0$ så får vi ekvationen

$$y'(t) = 2((1 + \sin(\pi t/10)) - \frac{2}{30}y(t), \quad t \geq 0.$$

med intialvärdet $y(0) = 90$.

---

6. (3p) Matrisen $A = \begin{bmatrix} -5 & 1.5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena -2 och -4 och motsvarande egenvektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm lösningen till differentialekvationssystemet

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Om X_j är en egenvektor som hör till egenvärdet λ_j så är $Y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} X_2$ en lösning till differentialekvationssystemet. Då är $Y(0) = c_1 X_1 + c_2 X_2$. I detta fall är $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ så vi får ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

eller

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1, \\ 2c_1 + 2c_2 &= -2. \end{aligned}$$

Lösningen till detta ekvationssystem är $c_1 = -2$ och $c_2 = 1$ så lösningen till ekvationssystemet blir

$$Y(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

---

7. (3p) Förklara varför funktionen $\dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ är integrerbar i intervallet $(0, \infty)$ utan att räkna ut integralen.

Lösning: Funktionen $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ är kontinuerlig åtminstone i intervallet $(0, \infty)$ så frågan om funktionen är integrerbar bestäms av hur den uppför sig nära 0 och hur snabbt eller långsamt den går mot 0 då $x \to \infty$.

Med hjälp av l'Hopitals regel ser man att

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \left(= \frac{0}{0} \right) \quad = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2},$$

så man får en kontinuerlig funktion om man definierar $f(0) = \frac{1}{2}$. Detta innebär att f är integrerbar i varje intervall $(0, T)$ med $T < \infty$. Eftersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ så gäller $0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2$ och eftersom $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2 < \infty$ så följer det av majorantprincipen att f också är integrerbar i intervallet $(1, \infty)$ och därmed också i $(0, \infty)$.
