Aalto-universitetet — Gripenberg/Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1

Tentamen och mellanförhörsomtagning 14.1.2010

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 4, 6, 8, 10 och 11.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1. Kontrollera om följande bevis för formeln $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$ är korrekt: Vi använder induktion och antar att påståendet gäller då $n=k$, dvs. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$. Vi visar att det också gäller då $n=k+1$ med hjälp av följande räkning där vi också använder induktionsantagandet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{(k-1)(k+2)+2}{2(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+1)}{2(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)-1}{2((k+1)+1)}.\end{aligned}$$

Induktionssteget fungerar och därför är påståendet bevisat.

Lösning: Beviset är ofullständigt eftersom det inte innehåller en kontroll av att påståendet gäller då $n=1$ och nu är $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{1-1}{2(1+1)}$ så det stämmer inte ens och eftersom induktionssteget är korrekt så kommer inte påståendet att stämma för något värde på n.

2.

(a) Använd Gauss metod för att bestämma en trappstegsform av den matris som beskriver ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & -4x_2 & +8x_3 & -5x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +20x_4 & = & 28 \\ -x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +6x_4 & = & 9 \end{array}$$

Du behöver inte bestämma lösningarna till systemet.

(b) När man skulle lösa ett ekvationssystem fick man följande matris i trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm alla lösningar till detta ekvationssystem

Lösning: (a) Med hjälp av Gauss algoritm får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 8 & -5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 & 20 & 28 \\ -1 & -2 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Eftersom det endast finns nollor på raderna 4 och 5 behöver man inte bry sig om dem. Eftersom det inte finns något pivot-element i den tredje kolumnen kan x_3 väljas fritt, tex. $x_3 = t$. Den tredje raden ger ekvationen $x_4 = 3$ och den andra ekvationen $2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6$ så att $x_2 = -2x_3 + x_4 + 3 = -2t + 6$. Den första raden ger ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ så att $x_1 = x_2 - x_3 + 2 = -2t + 6 - t + 2 = -3t + 8$. Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

3. Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} 46 & 36 \\ -60 & -47 \end{bmatrix}$ egenvärden och räkna ut en egenvektor för ett egenvärde (men du behöver inte räkna ut en egenvektor för det andra egenvärdet).

Lösning: Först löser vi den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (46-\lambda) & 36 \\ -60 & (-47-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Som lösningar får vi,

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \Big\{1, -2,$$

av vilket vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$.

I nästa steg räknar vi ut en egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_1 = 1$ dvs. vi löser ekvationen $(A - I)X = 0$. Med Gauss metod får vi,

$$\begin{bmatrix} 45 & 36 & 0 \\ -60 & -48 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{4}{3} r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 45 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $45x_1 + 36x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -\frac{4}{5}$. Som egenvektor kan vi alltså välja $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$, eller lika väl $X_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

En egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_2 = -2$ kan vi räkna ut på samma sätt, dvs. vi löser ekvationen $(A + 2I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{bmatrix} 48 & 36 & 0 \\ -60 & -45 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{5}{4} r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 48 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $48x_1 + 36x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -\frac{3}{4}$. Som egenvektor kan vi alltså välja $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$, eller lika väl $X_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

---

4. Antag att A är en sådan 2×2-matris att $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 3 \end{bmatrix}$. Vad är vinkeln mellan kolumnvektorerna i A?

Lösning: Om kolumnvektorerna är X_1 och X_2 så följer av definitionen av matrismultiplikationen att $X_1 \cdot X_1 = 2$, $X_2 \cdot X_2 = 3$ och $X_1 \cdot X_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Om nu θ är vinkeln mellan X_1 och X_2

så är

$$\cos(\theta) = \frac{X_1 \cdot X_2}{\sqrt{X_1 \cdot X_1}\sqrt{X_2 \cdot X_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

vilket innebär att $\theta = \frac{\pi}{3}$.

---

5. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ i punkten $(1,1)$.
Ledning: Använd implicit derivering.

Lösning: Antag att ekvationen för kurvan är $y = y(x)$ så att

$$x^3 + 3x^2y(x) - 6xy(x)^2 + 2y(x)^3 = 0.$$

Eftersom $1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 = 0$ ser vi att $y(1) = 1$ är en lösning i punkten $x = 1$. Om vi deriverar med avseende å x får vi

$$3x^2 + 6xy(x) + 3x^2y'(x) - 6y(x) - 12xy(x)y'(x) + 6y(x)^2y'(x) = 0.$$

Om vi sätter in $x = 1$ och $y(1) = 1$ får vi

$$3 + 6 + 3y'(1) - 6 - 12y'(1) + 6y'(1) = 0,$$

vilket ger $y'(1) = 1$ och tangentens ekvation blir $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$ eller $y = x$.

---

6. Förklara hur man med hjälp av Newton-Raphsons metod kan bestämma en approximation till en lösningt ill ekvationen $x^4 + 2x^3 = 1$ och räkna två steg med startvärdet $x_0 = 1$.

Lösning: Låt $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$ så att vi skall bestämma en lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Om man använder Newton-Raphsons metod räknar man en talföljd (x_n) där $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. I detta fall är $f'(x) = 4x^3 + 6x^2$ så vi får

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + 2x_n^3 - 1}{4x_n^3 + 6x_n^2}.$$

Om vi nu väljer $x_0 = 1$ så får vi

$$x_1 = 1 - \frac{1 + 2 - 1}{4 + 6} = \frac{4}{5},$$
$$x_2 = \frac{4}{5} - \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4 + 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 1}{4\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 6\left(\frac{4}{5}\right)^2} = 0.72636.$$

Om man fortsätter får man

$$x_3 = 0.71682$$
$$x_4 = 0.71667$$
$$x_5 = 0.71667$$

så en lösning är ca. 0.71667.

---

7. Bestäm med hjälp av linjär approximering hur mycket radien av en cirkel måste minska för att arean av området innanför cirkeln skall minska med 1 cm^2 om radien urskrungligen är 80 cm.

Lösning: Arean av området innanför cirkeln är $A(r) = \pi r^2$. Med linjär approximering får vi

$$A(r+h) - A(r) \approx A'(r)h = 2\pi r h.$$

Om nu $A(r+h) - A(r) = -1$ så blir

$$h \approx \frac{1}{2\pi r}(A(r+h) - A(r)) = \frac{1}{2\pi \cdot 80}(-1) = -0.0019894 \approx -0.002,$$

så radien skall minska med ca 0.002 cm.

---

8. Ett par skidor som stått ute över natten har temperaturen $-25°$. Skidornas temperatur 30 minuter efter att de tagits inomhus är $-10°$. Hur länge räcker det ännu efter detta tills temperaturen i skidorna stigit till $0°$ om man antar att temperaturen uppfyller differentialekvationen $T'(t) = -k(T(t) - T_0)$ där $T_0 = 20°$ är temperaturen inomhus. Låt $y(t) = T(t) - T_0$ och lös den differentialekvation som $y(t)$ uppfyller.

Lösning: Om $y(t) = T(t) - T_0$ så uppfyller $y(t)$ ekvationen $y'(t) = -ky(t)$ vilket innebär att $y(t) = \mathrm{e}^{-kt}y(0)$. Eftersom $T_0 = 20$ är $y(0) = -45$ och $y(30) = -30$, dvs.

$$-30 = \mathrm{e}^{-k\cdot 30}(-45) \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln(\frac{2}{3})}{3}0.$$

Om skidornas temperatur är $0°$ vid tidpunkten T så är $y(T) = -20$ och

$$-20 = \mathrm{e}^{-kT}(-45) \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\ln(\frac{20}{45})}{k} = 60.$$

Detta innebär att det räcker ännu 30 minuter från det att temperaturen blivit $-10°$ tills den blir $0°$.

---

9. Beräkna integralen $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ genom att integrera partiellt.
Ledning: Då $a > 0$ gäller $\lim_{t\to 0+} t^a \ln(t) = 0$ och det är en bättre ide att derivera logaritmfunktionen än att integrera den.

Lösning: Om vi integrerar t och deriverar $\ln(t)$ får vi

$$\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}t^2\ln(t) - \int_0^t \tfrac{1}{2}t^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}1^2\ln(1) - 0 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = -\Big/_0^1 \tfrac{1}{4}t^2 = -\frac{1}{4}.$$

10.

(a) (2p) Förklara vilken ide trapetsregeln för numerisk integrering bygger på.

(b) (4p) Beräkna en approximation av integralen $\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ med hjälp av trapetsregeln då man vet att $f(2) = 1$, $f(2.2) = 1.5$, $f(2.4) = 2$, $f(2.6) = 2$, $f(2.8) = 2.5$, $f(3) = 3$. Varför är det inte en god ide att försöka använda Simpson regel?

Lösning: (a) Om man skall approximera integralen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ och man käner till $f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ där $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ så ersätter man funktionen f i intervallet $[x_{j-1}, x_j]$ med den linjära funktionen $f(x_{j-1})\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + f(x_j)\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$ och beräknar intergalen av denna funktion i intervallet $[x_{j-1}, x_j]$ och sedan adderar man dessa integraler för $j = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Om $x_0 = 2$, $x_1 = 2.2$, $x_2 = 2.4$, $x_3 = 2.6$, $x_4 = 2.8$ och $x_5 = 3$ så ser vi att alla delintervall $[x_{j-1}, x_j]$ är lika långa, dvs. $h = 0.2$ (vilket inte är av avgörande betydelse men gör räkningarna enklare). Med trapetsregeln får vi nu

$$\begin{aligned} T_5 &= h(0.5 \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + 0.5 \cdot f(x_5)) \\ &= 0.2(0.5 + 1.5 + 2 + 2 + 2.5 + 1.5) = 2. \end{aligned}$$

Simpsons regel kan inte användas (åtminstone inte utan några modifikationer) för den förutsätter att antalet delintervall är jämnt vilket inte är fallet här.

---

11. Om $u(t) = 1$ då $t \geq 0$ och $u(t) = 0$ då $t < 0$ så gäller $f(t) = f(0) + (u * f')(t)$ då $t \geq 0$. Härled med hjälp av detta och det faktum att Laplace-transformen av en konvolution $g * h$ är produkten av Laplace-transformerna av g och h formeln för Laplace-transformen av f'.

Lösning: Enligt defintionen för Laplace-transformen får vi

$$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \Big/_0^\infty \frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st} = 0 - \frac{\mathrm{e}^0}{-s} = \frac{1}{s}.$$

Eftersom $f(t) = f(0)u(t) + (u * f')(t)$ så gäller

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{f(0)}{s} + \mathcal{L}(u)(s)\mathcal{L}(f')(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{\mathcal{L}(f')(s)}{s},$$

och när vi multiplicerar med s får vi

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

12.

(a) (4p) Följande tillämpning av Euklides algoritm visar att $\operatorname{sgd}(37, 30) = 1$:

$$\begin{aligned} 37 &= 1 \cdot 30 + 7 \\ 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Bestäm $[30]_{37}^{-1}$, dvs. ett tal k så att $1 \leq k < 37$ och $k \cdot 30 = 1 \pmod{37}$.

(b) (2p) När man använder RSA-metoden använder man den publika nyckeln (n, k) så att ”meddelandet” a, som är ett tal mellan 0 och $n - 1$ krypteras till $b = \operatorname{mod}(a^k, n)$ och sedan kan mottagaren använda sin privata nyckel (n, d) för att dekryptera b till $a = \operatorname{mod}(b^d, n)$. Hur skall k och d väljas om n är en produkt av två primtal p och q för att detta skall fungera? (Du behöver inte visa att det faktiskt fungerar då.)

Lösning:

(a) Först skall vi skriva $\operatorname{sgd}(37, 30) = 1$ som en linjär kombination av 37 och 30 och vi får då vi räknar baklänges:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgd}(37, 30) = 1 = 7 - 3 \cdot 2 &= 1 \cdot 7 - 3 \cdot (30 - 4 \cdot 7) \\ &= -3 \cdot 30 + 13 \cdot 7 = -3 \cdot 30 + 13 \cdot (37 - 1 \cdot 30) \\ &= 13 \cdot 37 - 16 \cdot 30 \end{aligned}$$

Vi kan också skriva

$$1 = 12 \cdot 37 + (37 - 16) \cdot 30 = 12 \cdot 37 + 21 \cdot 30,$$

vilket betyder att $21 \cdot 30 = 1 \pmod{30}$, dvs. $k = 21$.

(b) Om $n = p \cdot q$ och vi låter $m = (p-1) * (q-1)$ så skall k och d väljas så att $k \cdot d = 1 \pmod{m}$.
