TKK, Institutionen för matematik och systemanalys Gripenberg/Solin
Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tredje mellanförhöret 14.12.2009

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (3p) Vilken integral får man om man i integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$ gör variabelbytet $\sqrt{x+2}=t$. Du behöver inte räkna ut den här integralen.

Lösning: Om $\sqrt{x+2}=t$ så är $x+2=t^2$ och därför $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Då $x=0$ så är $t=\sqrt{2}$ och då $x=2$ så är $t=2$. Den nya integralen blir därför

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2-2}{t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^2 (2t^2-4)\,\mathrm{d}t.$$

---

2. (4p) Beräkna en approximation av integralen $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ genom att använda 4 lika långa delintervall och någon lämplig numerisk integrationsmetod.

Lösning: Om man använder mittpunktsmetoden skall man räkna

$$M_4 = h\Big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)++f(x_{3)}\Big),$$

där $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ och $x_j = 0+(j+\frac{1}{2})\cdot 0.5$, $j=0,1,2,3$ och man får

$$M_4 = 0.5\Big(1.98431+1.85405+1.56125+0.968246\Big) = 3.18393.$$

Om man använder trapetsmetoden skall man räkna

$$T_4 = h\Big(\tfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\tfrac{1}{2}f(x_4)\Big),$$

där fortfarande $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ men $x_j=0+j\cdot 0.5$, $j=0,1,\ldots,4$ och man får

$$T_4 = 0.5\Big(0.5\cdot 2+1.93649+1.73205+1.32288+0.5\cdot 0\Big) = 2.99571.$$

Med Simpsons metod skall man räkna

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_{4)}\Big),$$

där $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ och $x_j=0+j\cdot 0.5$, $j=0,1,\ldots,4$ som i trapetsmetoden och man får

$$S_4 = \frac{0.5}{3}\Big(2+4\cdot 1.93649+2\cdot 1.73205+4\cdot 1.32288+0\Big) = 3.0836.$$

---

3. (3p) Då man räknade integralen $\int_2^8 \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ numeriskt med hjälp av Simpsons metod fick man som svar 26.8200193819123 då man använde 16 delintervall och 26.8438643785864 då man använde 32 delintervall. Om man vill få ett svar med ett fel som till sitt absolutbelopp är högst 10^{-2}, räcker det då att använda 32 delintervall? Motivera ditt svar!

Lösning: Om man räknar absolutbeloppet av skillnaden mellan de resultat man fick med 16 och med 32 intervall får man 0.024. Eftersom detta är större än 10^{-2} kan man inte vänta sig att absolutbeloppet av felet är högst 10^{-2} om man använder 32 delintervall. (Felet är i själva verket ca. 0.013.)

---

4. (3p) Visa, genom att integrera partiellt, att $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ där $\mathcal{L}(f)$ är Laplace-transformen av f. (Du kan tex. anta att det finns en konstant C så att $|f(t)| + |f'(t)| \le C$ då $t \ge 0$ så att Laplace-transformerna är definierade då Re $(s) > 0$.)

Lösning: Laplace-transformen av f' är enligt definitionen $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t$ och genom att integrera partiellt får man

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t &= \Big/_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t) - \mathrm{e}^{-s\cdot 0} f(0) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0),\end{aligned}$$

eftersom $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-st} = 0$ då Re $(s) > 0$ och vi antog att $|f(t)| \le C$ och $\mathrm{e}^0 = 1$.

---

5. (5p) Funktionen $y(t)$ är lösningen till differentialekvationen

$$4y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t\cos(2t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

Bestäm Laplace-transformen av funktionen $y(t)$. Laplace-transformen av $\cos(\omega t)$ är $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ och kom ihåg vilken funktion derivatan av en Laplace-transform är Laplace-transformen av. Räkna inte ut $y(t)$!

Lösning: Låt $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ vara Laplace-transformen av y. Då är

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2,$$

och

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0) = s(sY(s) - 2) + 2 = s^2Y(s) - 2s + 2.$$

Eftersom $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+2^2}$ så är

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}(-t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{s}{s^2+2^2} = \frac{1}{s^2+4} - \frac{s\cdot 2s}{(s^2+4)^2} = -\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2},$$

och vi kan konstatera att $\mathcal{L}(t\cos(2t)(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$.

Om vi nu tar Laplace-transformen av båda sidorna av ekvationen får vi

$$4\big(s^2Y(s) - 2s + 2\big) + 3\big(sY(s) - 2\big) + 2Y(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2},$$

så att

$$(4s^2 + 3s + 2)Y(s) - 8s + 8 - 6 = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2},$$

och

$$Y(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2(4s^2+3s+2)} + \frac{8s-2}{4s^2+3s+2} = \frac{8s^5 - 2s^4 + 64s^3 - 15s^2 + 128s - 36}{(s^2+4)^2(4s^2+3s+2)}.$$

---

6. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren av talen 80 och 36 med hjälp av Euklides algoritm.

Lösning: I enlighet med Euklides algoritm räknar vi ut r_j, $j \geq 0$ så att $r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ då $j \geq 0$ och $0 \leq r_j < r_{j-1}$ med $r_0 = 80$ och $r_1 = 36$ och vi får

$$\begin{aligned} 80 &= 2 \cdot 36 + 8 \\ 36 &= 4 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Av detta ser vi att den största gemensamma delaren av 80 och 36 är 4.

---

7. (3p) I ett universtitet används studentnummer som bildas av åtta siffror och en kontrollbokstav. Studerande S skrev sitt nummer på en blankett som $23x78366H$ där siffran x blev oläslig. Bestäm x på något annat sätt än att bara prova med alla möjligheter då man vet att kontrollbokstaven H betyder att resten då talet som bildas av siffrorna före kontrollbokstaven divideras med 23 blir 8. Du kan utnyttja det faktum att då 23078366 divideras med 23 blir resten 5, då 100000 divideras med 23 blir resten 19 och då $19 \cdot 17$ divideras med 23 blir resten 1.

Lösning: Talet $23x78366$ kan skrivas som $23078366 + x \cdot 100000$ och eftersom man kan räkna normalt med kongruensklasser får man

$$[23078366 + x \cdot 100000]_{23} = [23078366]_{23} + [x]_{23} \cdot [100000]_{23}.$$

De resultat beträffande rester som ges i uppgiften betyder att $[23078366]_{23} = [5]_{23}$, $[100000]_{23} = [19]_{23}$ och $[19]_{23}^{-1} = [17]_{23}$ och därför får man ekvationen

$$[5]_{23} + [x]_{23} \cdot [19]_{23} = [8]_{23},$$

så att

$$[x]_{23} = ([8]_{23} - [5]_{23}) \cdot [19]_{23}^{-1} = [3]_{23} \cdot [17]_{23} = [51]_{23} = [5]_{23},$$

vilket innebär, eftersom $0 \leq x \leq 9$, att $x = 5$.
