TKK, Institutionen för matematik och systemanalys — Gripenberg/Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1

Andra mellanförhöret 17.11.2009

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (2p) Är $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$? Motivera ditt svar!

Lösning: Enligt definitionen är $\sup(A \cup B)$ det minsta tal s för vilkert gäller att om $x \in A \cup B$ så är $x \le s$. Detta betyder också att om $x \in A$ så är $x \le \sup(A) \le \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ och om $x \in B$ så är $x \le \sup(B) \le \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Eftersom $x \in A$ eller $x \in B$ om $x \in A \cup B$ så innebär detta att $\sup(A \cup B) \le \max\{\sup(A), \sup(B)\}$, men eftersom $A \subset A \cup B$ så är $\sup(A) \le \sup(A \cup B)$ och eftersom $B \subset A \cup B$ så är $\sup(B) \le \sup(A \cup B)$ så att $\max\{\sup(A), \sup(B)\} \le \sup(A \cup B)$ och svaret på frågan är jakande.

---

2. (3p) Existerar gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x + x^2 \sin(\frac{1}{x})}$ och vad är det i så fall? Motivera ditt svar!

Lösning: Vi gissar att gränsvärdet är 0 och försöker hitta en funktion $g(x)$ så att $|\frac{x^2}{x+x^2\sin(\frac{1}{x})}| \le g(x)$ och $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Eftersom $|\sin(\frac{1}{x})| \le 1$ så är $|x + x^2 \sin(\frac{1}{x})| \ge |x| - |x^2|$ och det innebär att då $|x| < 1$ så har vi

$$\left| \frac{x^2}{x + x^2 \sin(\frac{1}{x})} \right| \le \frac{|x^2|}{|x| - |x^2|} = |x| \frac{1}{1 - |x|}$$

och funktionen $g(x) = |x| \frac{1}{1-|x|}$ är kontinuerlig i intervallet $(-1, 1)$ så gränsvärdet $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$. Enligt instängningsprincipen får vi nu att det gränsvärde som skulle bestämmas är 0.

---

3. (5p) Radien i en rund ballong är 20 cm. Använd linjär approximering för att uppskatta hur mycket radien måste öka för att ballongens yta skall växa med 2 cm^2.
Ledning: Arean av ytan av en boll med radien r är $4\pi r^2$.

Lösning: Om vi betecknar arean med A så har vi $A = 4\pi r^2$ och om vi uttrycer arean som en funktion $A(r)$ av radien så får vi villkoret

$$A(r + h) - A(r) \approx A'(r)h = 8\pi r h,$$

så att om $A(r + h) - A(r) = 2$ (vi mäter allting i cm) så blir

$$h \approx \frac{A(r + h) - A(r)}{8\pi r} = \frac{2}{8\pi \cdot 20} \approx 0.004.$$

Ett annat sätt är man uttrycker radien som en funktion av arean, dvs. $r(A) = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$. En linjär approximation ger då

$$r(A + k) - r(A) \approx r'(A)k.$$

Nu är $r'(A) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{A}}$ och när $r = 20$ cm är $A = 4\pi \cdot 20^2$ så att

$$r(A + k) - r(A) \approx r'(A)k = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\pi} 20^2} \cdot 2 = \frac{2}{8\pi \cdot 20} \approx 0.004.$$

Svaret är alltså ca. 0.004 cm.

---

4. (2p) När man skulle bestämma ett nollställe till en funktion $f(x)$ med hjälp av Newton-Raphsons metod fick man följande resultat:

$$x_1 = 5.01336305085918 \qquad x_2 = 5.01002228814438$$
$$x_3 = 5.00751671610829 \qquad x_4 = 5.00563753708122$$
$$x_5 = 5.00422815281091 \qquad x_6 = 5.00317111460818$$

Finns det någon grund för att säga att talen x_n närmar sig en punkt x_* så att $f(x_*) = 0$ och $f'(x_*) = 0$? Du kan anta att f är kontinuerligt deriverbar. Motivera ditt svar!

Lösning: Det ser ut som om talföljden konvergerar mot ett tal x_* som är ungefär 5 vilket tyder på, eftersom i Newton-Raphsons metod, $x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ att $f(x_n)$ närmar sig noll (eller så går $|f'(x_n)|$ mot oändligheten, vilket inte är möjligt om f är kontinuerligt deriverbar) och därför måste $f(x_*) = 0$. Om nu $f'(x_*) \neq 0$ så borde konevrgensen ske mycket snabbare så att $|x_{n+1} - x_*| \leq C|x_n - x_*|^2$, dvs., sä att antalet decimaler som inte ändras ungefär fördubblas i varje steg. Men det är definitivt inte fallet så allt tyder pä att $f'(x_*) = 0$.

---

5. (3p) Man kan bestämma $\sqrt[5]{a}$ numeriskt genom att lösa ekvationen $x^5 = a$ med hjälp av Newton-Raphsons metod och detta leder till en rekursionsformel av typen $x_{n+1} = g(x_n)$. Bestäm funktionen g i detta fall.

Lösning: Om $f(x) = x^5 - a$ så är $f'(x) = 5x^4$ och enligt Newton-Raphsons metod räknar man talföljden (x_n) så att $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, dvs. i detta fall

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{5}\frac{a}{x^4},$$

och detta innebär att

$$g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\frac{a}{x^4}.$$

---

6. (4p) Bestäm funktionen $y(x)$ så att

$$y''(x) + 7y'(x) + 12y(x) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 5.$$

Lösning: Genom att i ekvationen sätta in $y = \mathrm{e}^{rx}$ får vi den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 7r + 12 = 0.$$

Lösningarna till den här ekvationen är

$$r = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} = \begin{cases} -3, \\ -4. \end{cases}$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är därför

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-3x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}.$$

Eftersom $y'(x) = -3c_1\mathrm{e}^{-3x} - 4c_2\mathrm{e}^{-4x}$ så får vi följande ekvationssystem när vi sätter in initi-alvärdena $y(0) = -1$ och $y'(0) = 5$:

$$\begin{aligned} -1 &= c_1 + c_2, \\ 5 &= -3c_1 - 4c_2. \end{aligned}$$

Om man löser ekvationssystemet får man $c_1 = 1$ och $c_2 = -2$ så att

$$y(x) = \mathrm{e}^{-3x} - 2\mathrm{e}^{-4x}.$$

---

7. (2p) Hur kan man av svaret och funktionen som skall integreras se att följande räkning är felaktig?

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big/_{-1}^{1} -\frac{1}{x} = -2.$$

Vad är felet i räkningen?

Lösning: Eftersom $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ så är $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ förutsatt att funktionen man integrerar är integrerbar och i det här fallet fick man ett svar som är negativt. I verkligheten är $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$ och felet är att man inte kan tillämpa analysens grundsats på funktioner som inte är integrerbara.

---

8. (3p) Visa att $\sin(x) \geq x - \frac{1}{6}x^3$ för alla $x \geq 0$ genom att utnyttja det faktum att $\sin(x) \leq x$ för alla $x \geq 0$.
Ledning: Man kan antingen använda integraler, eller använda egenskaper hos konvexa funktioner, eller . . .
Lösning: Eftersom $\sin(t) - t \leq 0$ för $t \geq 0$ får vi då $x \geq 0$

$$0 \geq \int_0^x (\sin(t) - t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^x \left(-\cos(t) - \frac{1}{2}t^2\right)$$
$$= -\cos(x) - \frac{1}{2}x^2 + \cos(0) + 0 = 1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2.$$

Om vi integrerar en gång till får vi då $x \geq 0$

$$0 \geq \int_0^x \left(1 - \cos(t) - \frac{1}{2}t^2\right)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^x \left(t - \sin(t) - \frac{1}{6}t^3\right) = x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3,$$

vilket är detsamma som att $\sin(x) \geq x - \frac{1}{6}x^3$ då $x \geq 0$.

En annan möjlighet är att definiera $f(x) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3$ och observera att f är konvex då $x \geq 0$ eftersom $f''(x) = -\sin(x) + x \geq 0$ enligt den givna olikheten. Eftersom garfen av en konves funktion ligger ovanför tangenten har vi $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ och om vi väljer $x_0 = 0$ får vi, eftersom $f'(x) = \cos(x) - 1$,

$$f(x) \geq \sin(0) - 0 + \frac{1}{6}0^3 + (\cos(0) - 1)(x - 0) = 0,$$

vilket ger påståendet.
