

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!

En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (2p) Är $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$? Motivera ditt svar!
2. (3p) Existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+x^2 \sin(\frac{1}{x})}$ och vad är det i så fall? Motivera ditt svar!
3. (5p) Radien i en rund ballong är 20 cm. Använd linjär approximering för att uppskatta hur mycket radien måste öka för att ballongens yta skall växa med 2 cm^2 .
Ledning: Arealen av ytan av en boll med radien r är $4\pi r^2$.
4. (2p) När man skulle bestämma ett nollställe till en funktion $f(x)$ med hjälp av Newton-Raphsons metod fick man följande resultat:

$$x_1 = 5.01336305085918$$

$$x_2 = 5.01002228814438$$

$$x_3 = 5.00751671610829$$

$$x_4 = 5.00563753708122$$

$$x_5 = 5.00422815281091$$

$$x_6 = 5.00317111460818$$

Finns det någon grund för att säga att talen x_n närmar sig en punkt x_* så att $f(x_*) = 0$ och $f'(x_*) = 0$? Du kan anta att f är kontinuerligt deriverbar. Motivera ditt svar!

5. (3p) Man kan bestämma $\sqrt[5]{a}$ numeriskt genom att lösa ekvationen $x^5 = a$ med hjälp av Newton-Raphsons metod och detta leder till en rekursionsformel av typen $x_{n+1} = g(x_n)$. Bestäm funktionen g i detta fall.

6. (4p) Bestäm funktionen $y(x)$ så att

$$y''(x) + 7y'(x) + 12y(x) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 5.$$

7. (2p) Hur kan man av svaret och funktionen som skall integreras se att följande räkning är felaktig?

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^1 -\frac{1}{x} = -2.$$

Vad är felet i räkningen?

8. (3p) Visa att $\sin(x) \geq x - \frac{1}{6}x^3$ för alla $x \geq 0$ genom att utnyttja det faktum att $\sin(x) \leq x$ för alla $x \geq 0$.

Ledning: Man kan antingen använda integraler, eller använda egenskaper hos konvexa funktioner, eller ...