Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1, del I

G. Gripenberg

TKK

8 oktober 2009

Mängder

Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp de elementen i mängden, tex.

$$A = \{2, 4, 5, 8\} \quad \textit{eller} \quad B = \{4, 5, \dots 2004\}.$$

Man skriver $x \in A$ *om* x *är ett element i* A *och* $x \notin A$ *om* x *inte är det, så att tex.* $2 \in A$, $375 \in B$ *men* $6 \notin A$ *och* $3 \notin B$.
Observera att mängderna $\{2, 3, 2\}$ *och* $\{3, 2\}$ *är desamma eftersom de innehåller samma element och upprepningar och ordningen i vilka de anges har ingen betydelse.*
Ofta anges mängder som de element i en mängd A *som har en viss egenskap* P, *dvs.* $B = \{\, x \in A : P(x) \,\}$ *där* $P(x)$ *för varje* $x \in A$ *antingen är sant eller falskt. Tex. är* $\{\, x \in \mathbb{R} : x \leq 4 \,\}$ *alla reella tal som är mindre eller lika med* 4.

- $A \cup B = \{\, x : x \in A \text{ eller } x \in B \,\}$
- $A \cap B = \{\, x : x \in A \text{ och } x \in B \,\}$
- $A \setminus B = \{\, x : x \in A \text{ och } x \notin B \,\}$

Induktionsaxiomet

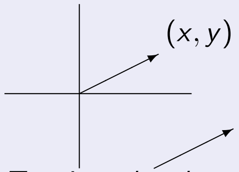
Om $P(n)$ är ett påstående som antingen är sant eller falskt för alla $n \geq n_0$ och

- *$P(n_0)$ är sant*
- *$P(k+1)$ är sant ifall $P(k)$ är sant då $k \geq n_0$*

så är $P(n)$ sant för alla $n \geq n_0$.

Vektorer i $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^n$

Elementen i mängden $\mathbb{R}^2 = \{\,(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\,\}$ kan antingen behandlas som punkter i xy-planet eller som "vektorer" med startpunkt i origo och slutpunkt i punkten (x,y). När man behandlar sådana vektorer tänker man ofta att de kan förflyttas så att om de har startpunkten i (x_0, y_0) så kommer slutpunkten att ligga i $(x_0 + x, y_0 + y)$.



Tex. i samband med matriser är det skäl att göra skillnad mellan radvektorer $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ och kolumnvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Om man vill betona skillnaden mellan en punkt $(1,2,3)$ i $\mathbb{R}^3$ och en vektor från origo till punkten så kan man skriva vektorn i formen $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ där alltså $\mathbf{i}$ är vektorn från origo till $(1,0,0)$, $\mathbf{j}$ är vektorn från origo till $(0,1,0)$ osv.

Skalärprodukt, längd ,vinkel

Om $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *och* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *är vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *så är*

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$
- $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
- $\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$ *där* α *är vinkeln mellan* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *(förutsatt att* $|\mathbf{x}| > 0$ *och* $|\mathbf{y}| > 0$*)*
- $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *vinkelräta mot varandra (*$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$*) om* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.
- *Projektionen av vektorn* $\mathbf{x}$ *på vektorn* $\mathbf{y}$ *(ifall* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$*) är* $\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$.

Kryssprodukt av vektorer i $\mathbb{R}^3$

Om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *och* $\mathbf{y} = (y_1, , y_2, y_3)$ *så är*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Egenskaper:

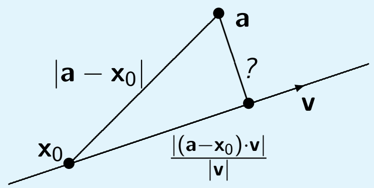
- $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y}$;
- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$
- $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin(\alpha)$ *där* α *är vinkeln mellan* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *så att* $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|$ *är arean av den parallellogram som bildas av vektorerna* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$.

Avståndet från en punkt till en linje I

Om vi skall bestämma avståndet från punkten (med ortsvektor) $\mathbf{a}$ *till den linje som går genom punkten (med ortsvektor)* $\mathbf{x}_0$ *och riktning* $\mathbf{v}$ *så kan vi resonera såhär: Punkten (med ortsvektor)* $\mathbf{x}_1$ *på linjen som ligger närmast* $\mathbf{a}$ *kan skrivas i formen* $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ *(eftersom den ligger på linjen) och är sådan att* $\mathbf{a} - \mathbf{x}_2$ *är vinkelrät mot* $\mathbf{v}$ *(eftersom den ligger närmast). Av detta får vi villkoret* $(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$ *vilket ger* $t = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ *och* $|t\mathbf{v}| = \frac{|(\mathbf{a}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$. *Avståndet till linjen är alltså*

$$|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{v}| = \ldots = \sqrt{|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0|^2 - \frac{|(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}}$$

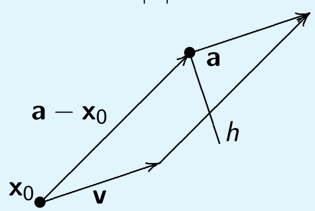
Pythagoras teorem:



Avståndet från en punkt till en linje II

Vi skall igen bestämma avståndet från punkten (med ortsvektor) $\mathbf{a}$ *till den linje som går genom punkten (med ortsvektor)* $\mathbf{x}_0$ *och riktning* $\mathbf{v}$ *och ett annat sätt att resonera är följande: Vektorerna* $\mathbf{a} - \mathbf{x}_0$ *och* $\mathbf{v}$ *bestämmer en parallellogram som har arean* $|(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}|$. *Denhär arean kan också skrivas som "höjden gånger basen" där "höjden"* h *är det avstånd man skall bestämma och basen är längden av vektorn* $\mathbf{v}$. *Då får vi* $h|\mathbf{v}| = |(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}|$ *vilket innebär att avståndet är*

$$\frac{|(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$



Komplexa tal

Reell och imaginär del, konjugering, absolutbelopp

- $z = x + \mathrm{i}y = x + y\mathrm{i}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1$
- $\mathbb{C}$ *är mängden av komplexa tal*
- *Reell del:* $\mathrm{Re}\,(x + \mathrm{i}y) = x$
- *Imaginär del:* $\mathrm{Im}\,(x + \mathrm{i}y) = y$ *så* $\mathrm{Im}\,(z)$ *är alltså ett* **reellt** *tal*
- *Konjugering:* $\overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y \quad (= x + \mathrm{i}(-y))$
- *Absolutbelopp (eller modul)* $|x + \mathrm{i}y| = \ \mathrm{mod}\ (x + \mathrm{i}y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Räkneregler

- $|z|^2 = z\overline{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$

Exempel

Vid addition och subtraktion av komplexa tal adderar och subtraherar man de reella och imaginära delarna var för sig så att tex.

$$(8 + 2\mathrm{i}) + (-3 - 4\mathrm{i}) = (8 + (-3)) + (2 + (-4))\mathrm{i} = 5 - 2\mathrm{i}.$$

Vid multiplikation gäller det bara att komma ihåg att $i^2 = -1$*:*

$$\begin{aligned}(8 + 2\mathrm{i})(-3 - 4\mathrm{i}) &= 8 \cdot (-3) + 8 \cdot (-4)\mathrm{i} + 2 \cdot (-3)\mathrm{i} + 2 \cdot (-4)\mathrm{i}^2 \\ &= -24 - 32\mathrm{i} - 6\mathrm{i} - 8 \cdot (-1) = -16 - 38\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Division av komplexa tal kan räknas så att man förlänger med nämnarens konjugat så att man i nämnaren får ett reellt tal, tex.:

$$\begin{aligned}\frac{8 + 2\mathrm{i}}{-3 - 4\mathrm{i}} &= \frac{(8 + 2\mathrm{i})(-3 + 4\mathrm{i})}{(-3 - 4\mathrm{i})(-3 + 4\mathrm{i})} = \frac{-24 + 32\mathrm{i} - 6\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2}{(-3)^2 - (4\mathrm{i})^2} \\ &= \frac{-24 - 8 + 26\mathrm{i}}{9 - 16\mathrm{i}^2} = \frac{-32 + 26\mathrm{i}}{9 + 16} = -\frac{32}{25} + \frac{26}{25}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Kommentar

Ett annat, formellt mera korrekt, sätt att definiera de komplexa talen är att inte alls (explicit) tala om den imaginära konstanten i *utan tala om punkter (eller vektorer)* (x, y) *i planet* $\mathbb{R}^2$ *och definiera* *räkneoperationer* *för dem som motsvarar räkneoperationerna för vanliga reella tal. Addition är inget problem eftersom det enda förnuftiga är att definiera*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

vilket är addition av vektorer. Ett viktigt villkor som multiplikationen skall uppfylla är att produkten av två "punkter" endast får vara "noll" (dvs. $(0, 0)$*) om åtminstone den ena faktorn är "noll". Detta uppnås om man definierar*

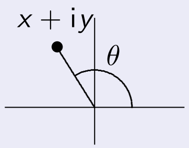
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

och man kan då visa att "alla räkneregler gäller".

Argument eller fasvinkel

Ifall $\mathrm{Re}\,(z) = x$ *och* $\mathrm{Im}\,(z) = y$ *så är argumentet* $\theta = \arg(z)$ *av* z

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (+2k\pi), & x > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad (+2k\pi), & x < 0, \\ \dfrac{y}{|y|}\dfrac{\pi}{2} \quad (+2k\pi), & x = 0 \end{cases}$$



atan2

I de flesta programmeringsspråk finns en funktion `atan2` *som räknar ut det argument av* $x + \mathrm{i}y$ *som ligger i intervallet* $(-\pi, \pi]$ *med kommandot* `atan2(y,x)`. *Observera att i tex. Excel och OOCalc skall man skriva* `atan2(x;y)` *(eller* `atan2(x,y)`*) dvs. byta ordning på argumenten.*

Polär framställning

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = re^{\mathrm{i}\theta},\ r \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\ |z| = r \text{ och } \arg(z) = \theta$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\,(z) = r\cos(\theta) \text{ och } \mathrm{Im}\,(z) = r\sin(\theta)$$

Kommentar

Om x är ett reellt tal kan man skriva $x = |x|\mathrm{sign}\,(x)$ vilket motsvarar den polära framställningen $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$ med den skillnaden att teckenfunktionen $\mathrm{sign}\,(x)$ *bara får två värden (eftersom man inte behöver bry sig om* $\mathrm{sign}\,(0)$*).*

Exempel

- $\arg(-3) = ?$
  Eftersom den reella delen är negativ är argumentent $\arctan(\frac{0}{-3}) + \pi \quad (+2k\pi) = \pi \quad (+2k\pi)$.
- $\arg(2-2\mathrm{i}) = ?$
  Argumentet är $\arctan(\frac{-2}{2}) \quad (+2k\pi) = -\frac{\pi}{4} \quad (+2k\pi)$.
- $\arg(-3e^{-\mathrm{i}\,0.1234}) = ?$
  Argument är $\arg(-3) + \arg(e^{-\mathrm{i}\,0.1234}) = \pi - 0.1234 \quad (+2k\pi)$.

Räkneregler

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg(z^n) = n\arg(z), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2), \quad \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2)$
- $\Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

  där $\theta_1 = \arg(z_1)$ *och* $\theta_2 = \arg(z_2)$

Exponentfunktionen

- $\exp(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$
- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$
- $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(z)}, \quad \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}\,(z)$
- $\mathrm{e}^z \neq 0,\ z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1\ \theta \in \mathbb{R}$

d'Moivres formel

$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^n = \left(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\right)^n$$

Logaritmfunktionen $z = \ln(w) \Leftrightarrow w = \mathrm{e}^z$

Om $z = x + \mathrm{i}y$ *så är* $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ *och* $\arg(\mathrm{e}^z) = y$

och om $w = \mathrm{e}^z$ *måste* $|w| = |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ *och*
$\arg(w) + 2k\pi = \arg(\mathrm{e}^z) = y$

dvs. $x = \ln(|w|)$ *så att* $z = \ln(w) = \ln(|w|) + \mathrm{i}(\arg(w) + 2k\pi)$.

> *För att få en "ordentlig" logaritmfunktion med bara ett värde i varje punkt kan man tex. definiera* $\mathrm{Ln}(w) = \ln(|w|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(w)$ *där* $\mathrm{Arg}(w)$ *är argumentet valt så att* $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ *så att tex.* $\ln(|w|)$ *egentligen är* $\mathrm{Ln}(|w|)$

Rötter: $z = w^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow w = z^n$

Om $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, *dvs.* $\varphi = arg(z)$ *så är* $|z^n| = |z|^n$ *och* $\arg(z^n) = n\varphi$

och om $w = z^n$ *så är* $|w| = |z|^n$ *och* $\arg(w) + 2k\pi = n\varphi$ *så att om* $\arg(w) = \theta$ *så är*

$|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ *och* $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ *dvs.*

$$z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),$$

där $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *eftersom man får samma värden för* $k+n$ *som för* k.

Exempel

Låt $w = 1 + \mathrm{i}$. Bestäm den lösning till ekvationen $z^4 = w$, vars argument ligger i intervallet $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Lösning: Absolutbeloppet av talet w är $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.4142$, och w:s argument är $\arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$. Ifall $|z| = r$ och $\arg(z) = \varphi$, så är $|z^4| = r^4$ och $\arg(z^4) = 4\varphi$. Om nu $z^4 = w$ så är $r^4 = |w| = \sqrt{2}$ och $4\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ där k är ett heltal. Av detta följer att $r = \sqrt[8]{2} \approx 1.0905$ och $\varphi = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k = 0.19635 + 1.5708k$. Nu får man olika lösningar då $k = 0, 1, \dots, 3$ eftersom man då tex. $k = 4$ får samma tal som då $k = 0$ osv. Eftersom argumenten för dehär lösningarna är $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{16} + \pi$ och $\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}$ så ser vi att den lösning vars argument ligger i intervallet $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ fås då $k = 2$ och är alltså

$$\begin{aligned} z_2 &= 1.0905\Big(\cos(0.19635 + 1.5708 \cdot 2) + \mathrm{i}\,\sin(0.19635 + 1.5708 \cdot 2)\Big) \\ &= -1.0696 - \mathrm{i}\,0.21275. \end{aligned}$$

Matriser, indexering

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(m,1) & A(m,2) & \dots & A(m,n) \end{bmatrix} = [A(j,k)] = [a_{jk}]$$

är en $m \times n$-matris.

$A(j,:)$ är rad j och $A(:,k)$ är kolumn k i matrisen A

Räkneoperationer

- *Transponering:* $B = A^T \Leftrightarrow B(j,k) = A(k,j)$
- *Summa* $A + B = C$: A, B *och* C $m \times n$*-matriser,* $C(j,k) = A(j,k) + B(j,k)$
- *Multiplikation med en skalär,* $\lambda A = C$: $C(j,k) = \lambda A(j,k)$
- *Produkt* $C = AB$: A *är en* $m \times n$*-,* B *en* $n \times p$*- och* C *en* $m \times p$*-matris,* $C(j,k) = \sum_{q=1}^{n} A(j,q)B(q,k)$
- *Hermiteskt konjugat,* $\overline{A}^T = C$: $C(j,k) = \overline{A(k,j)}$*, dvs. transponering och komplex konjugering*

Obs!

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T,$$
$$\overline{(\lambda A + \mu B)}^T = \overline{\lambda}\,\overline{A}^T + \overline{\mu}\,\overline{B}^T.$$

Egenskaper hos matrisprodukten

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A(BC) = (AB)C$ *ifall* A *är* $m \times n$, B *är* $n \times p$ *och* C *är* $p \times q$
- *I allmänhet är* $AB \neq BA$

Några definitioner

- $0_{m\times n}$ *eller endast* 0 *är en* $m \times n$*-matris, vars alla element är* 0
- $I_{m\times m}$ *eller vanligtvis endast* I *är en* $m \times m$*-matris, vars alla diagonalelement är* 1*, dvs.*

$$I(j,k) = \begin{cases} 1, & \text{ifall } j = k, \\ 0, & \text{ifall } j \neq k. \end{cases}$$

- $AI = IA = A$

Observera

Elementen i en matris kan också vara matriser, tex.:

- *En* $m \times n$ *matris kan behandlas som en* $m \times 1$ *matris vars element är* $1 \times n$ *matriser, dvs. radvektorer.*
- *En* $m \times n$ *matris kan behandlas som en* $1 \times n$ *matris vars element är* $m \times 1$ *matriser, dvs. (kolumn)vektorer.*
- *Produkten av en matris och en vektor:*

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(:,1) \dots A(:,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 A(:,1) + \dots + x_n A(:,n)$$

så AX *är alltså en linjär kombination av kolumnvektorerna i* A

Olika typer av matriser

En $n \times n$ *matris* A *är*

- *kvadratisk*
- *inverterbar eller reguljär ifall det finns en (invers) matris* A^{-1} *så att* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

  men det räcker att kontrollera att $AA^{-1} = I$ *eller* $A^{-1}A = I$
- *en diagonalmatris ifall* $A(j,k) = 0$ *då* $j \neq k$
- *en övertriangulär matris ifall* $A(j,k) = 0$ *då* $j > k$
- *en undertriangulär matris ifall* $A(j,k) = 0$ *då* $j < k$
- *symmetrisk ifall* $A^{\mathsf{T}} = A$
- *skevsymmetrisk ifall* $A^{\mathsf{T}} = -A$
- *ortogonal ifall* $A^{\mathsf{T}}A = AA^{\mathsf{T}} = I$*, dvs.* $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$
- *hermitesk ifall* $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$
- *skevhermitesk ifall* $\overline{A}^{\mathsf{T}} = -A$
- *unitär ifall* $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = A\overline{A}^{\mathsf{T}} = I$*, dvs.* $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A^{-1}$.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Om A är kvadratisk så är $A^0 = I$ och då $n > 0$ är
  - $A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n}$
  - $A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n}$
  - $(A^n)^{-1} = A^{-n}$
  - $A^nA^m = A^{n+m}$ och $(A^n)^m = A^{nm}$
  - men i allmänhet är $(AB)^n \neq A^nB^n$

Punkt- eller skalärprodukt som matrisprodukt

Observera att om $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n)$ *och* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *så är*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots x_ny_n = X^T Y \quad \text{där} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Linjära ekvationssystem

$$AX = B$$

Kan lösas med Gauss metod där man genom radoperationer omvandlar koefficientmatrisen till trappstegsform.

Gauss algoritm

Radopertioner:

- *Addera en rad multiplicerad med ett tal till en annan rad.*
- *Låt två rader byta plats.*
- *Multiplicera en rad med ett tal som inte är* 0.

Obs

Algortimen fungerar för det ekvationssystem man får genom att tillämpa en eller flera radopertaioner har samma lösningar som det ursprungliga. Dessutom kan man med liknande radoperationer komma tillbaka till utgångsläget.

Målsättning: Att få matrisen i "trappstegsform"

En $m \times n$ matris A är i trappstegsform om av villkoret

$$A(j,k) \neq 0 \quad \text{och} \quad A(j,q) = 0 \text{ då } 1 \leq q < k$$

följer att

$$A_{p,q} = 0 \text{ då } j < p \leq m \text{ och } 1 \leq q \leq k,$$

dvs. då det till vänster och nedanför det första elementet på en rad som inte är 0 bara finns nollor.
Ibland (tex. i Lay) krävs det av trappstegsformen att alla rader med bara nollor "finns längst ner".

Pivotelement

Elementet (j,k) i en matris i trappstegsform är ett **pivotdelement** *ifall*

$$A(j,k) \neq 0 \quad \text{och} \quad A(j,q) = 0 \text{ då } 1 \leq q < k$$

dvs om det är det första elementet på sin rad som inte är noll.

Matrisen B är en trappstegsform av matrisen A om B är i trappstegsform och B kan erhålals från A genom att tillämpa radoperationerna i Gauss algoritm.

Lösning av ett ekvationssystem i trappstegsform:

- *Om det inte finns något pivot-element i kolumn k så kan variabeln x_k väljas fritt.*
- *Om elementet (j,k) är ett pivot-element och variablerna $x_{k+1}, \dots, x_n$ redan har lösts ur systemet så kan man lösa variabeln x_k med hjälp av ekvation j.*
- *Om det i ekvationssystemet finns en ekvation i formen*

$$0x_1 + 0x_2 + \dots 0x_n = a \text{ där } a \neq 0,$$

så har ekvationssystemet ingen lösning.

Partiell pivotering

Man byter rader så att absolutbeloppet av pivotelementet alltid blir så stort som möjligt.

Invers matris med Gauss metod

Om man vill räkna ut A^{-1} då A är en given $m \times m$- matris bildar man först en ny matris $[A, I]$ genom att lägga en enhetsmatris till höger om A och sedan tillämpar man Gauss algoritm så att pivotelementen blir 1 och man har nollor också ovanför pivotelementen. Om detta lyckas så att man får en enhetsmatris till vänster så har man inversen till höger dvs. matrisen har formen $[I, A^{-1}]$. Om A inte är inverterbar kan man inte åstadkomma en enhetsmatris till vänster.

Rangen av en matris

Rangen av en matris är antalet pivot-element i dess trappstegsform (och därmed också dimensionen av det vektorrum som spänns upp av kolumnvektorerna i matrisen och dimensionen det vektorrum som spänns upp av radvektorerna i matrisen).

Determinanter

$$\det\left([a]\right) = a$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) \end{vmatrix} = A(1,1)\begin{vmatrix} A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,2) & A(3,3) \end{vmatrix}$$

$$- A(1,2)\begin{vmatrix} A(2,1) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,3) \end{vmatrix} + A(1,3)\begin{vmatrix} A(2,1) & A(2,2) \\ A(3,1) & A(3,2) \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+j} A(j,k) \det\left(\underset{j,k}{\not{A}}\right) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{k+j} A(j,k) \det\left(\underset{j,k}{\not{A}}\right)$$

där $\underset{j,k}{\not{A}}$ är matrisen A från vilken man tagit bort rad j och kolumn k.
(Observera att det allmänna fallet är en blandning av en definition och påståenden som borde bevisas.)

Egenskaper hos determinanter

- $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- *En $m \times m$-matris A är inverterbar (dvs. A^{-1} existerar) om och endast om* $\det(A) \neq 0$.
- *Determinanten av en över- eller undertriangulär kvadartisk matris är produkten av elementen på diagonalen.*
- $\det(I) = 1$
- *Arean av en parallellogram är absolutbeloppet av determinanten av den matris som har (de icke-parallella) sidovektorerna som rader eller kolumner.*
- *Volymen av en parallellepiped är absolutbeloppet av determinanten av den matris som har (de icke-parallella) kantvektorerna som rader eller kolumner.*

Kryssprodukt som determinant

Om $\mathbf{a}$ *och* $\mathbf{b}$ *är vektorer i* $\mathbb{R}^3$ *så är*

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\mathbf{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)\mathbf{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Invers medhjälp av determinanter

Om A är en inverterbar $m \times m$-matris så är

$$A^{-1}(j,k) = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)} \det(\underset{k,j}{\not{A}})$$

där $\underset{j,k}{\not{A}}$ är matrisen A från vilken man tagit bort rad j och kolumn k. (Observera transponeringen!)

Obs!

Formeln ovan kan vara nyttig i vissa fall, men den är inte användbar för numeriska räkningar med m ens måttligt stor. För $m = 2$ kan däremot formeln

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

vara behändig.

Determinanter med Gauss algoritm:

Radoperationer på en kvadratisk matris ha följande effekt på determinanten: Om B fås från A genom att

- *addera en rad multiplicerad med ett tal till en annan rad så är* $\det(B) = \det(A)$
- *två olika rader byter plats så är* $\det(B) = -\det(A)$
- *en rad multipliceras med c så är* $\det(B) = c\det(A)$

Om matrisen B, som är i trappstegsform, har erhållits ur $m \times m$-matrisen A så att man gjort k radbyten och aldrig multiplicerat en rad med ett tal så är

$$\det(A) = (-1)^k \det(B) = (-1)^k B(1,1) \cdot B(2,2) \cdot \ldots B(m,m).$$

Obs!

Determinanter av 2×2 ch 3×3 matriser kan man ofta behöva räkna ut (både numeriskt och symboliskt) men determinanter av $m \times m$ matriser där $m >> 3$ behövs mera sällan och hela determinantbegreppet är besvärligt och icke-intuitivt i dessa fall.

Cramers regel

$$\begin{array}{ccccccc} A(1,1)x_1 & +A(1,2)x_2 & \ldots & +A(1,m)x_m & = & b_1 \\ A(2,1)x_1 & +A(2,2)x_2 & \ldots & +A(2,m)x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A(m,1)x_1 & +A(m,2)x_2 & \ldots & +A(m,m)x_m & = & b_m \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

där C_j är matrisen A i vilken kolumn j har ersatts med kolumvektorn $\begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_m \end{bmatrix}^T$.

Obs!

Cramers regel kan vara nyttig då m är 2 eller kanske 3 och då man inte räknar numeriskt och istället vill ha en "enkel" formel, men i andra fall kan den vara mera till skada än till nytta.

Vektorrum

Ett vektorrum $\mathcal{W}$ är en mängd sådan att två element (vektorer) i $\mathcal{W}$ kan adderas och varje element (vektor) kan multipliceras med ett tal (reellt tal i ett reellt vektorrum, komplext i ett komplext) och "alla förnuftiga räkneregler gäller". Tex. $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \}$ och $\mathbb{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \right\}$ är (reella) vektorrum.

Delrum

$\mathcal{V}$ är ett delrum av vektorrummet $\mathcal{W}$ ifall $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ och $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ då $u, v \in \mathcal{V}$

Linjärt oberoende

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ *är* **linjärt oberoende** *ifall*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

dvs. $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ **endast** *då* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Linjärt oberoende kolumnvektorer

Kolumnvektorerna $V_1, \ldots, V_m \in \mathbb{R}^{n\times,1}$ *är linjärt oberoende om och endast om den* **enda** *lösning till ekvationssystemet* $AX = 0$ *är* $X = 0$ *där* A *är en* $n \times m$ *matris så att* $A(:, j) = V_j$, $j = 1, \ldots m$.

Linjärt beroende

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ *är* **linjärt beroende** *ifall de* **inte** *är linjärt oberoende, dvs. (åtminstone) en av vektorerna kan skriva som en linjär kombination av de andra, dvs.*

$$\mathbf{v}_j = \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots \beta_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + \beta_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m.$$

Bas

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ *bildar en bas för vektorrummet* $\mathcal{W}$ *dvs. de är basvektorer ifall de är tillräckligt men inte för många:*

- *varje vektor i* $\mathcal{W}$ *kan skrivas i formen* $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m$
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ *är linjärt oberoende (vektorer i* $\mathcal{W}$*)*

$\Leftrightarrow$

- *varje vektor* $\mathbf{w}$ *i* $\mathcal{W}$ *kan skrivas på ett entydigt sätt i formen*

$$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m.$$

Dimension

Dimensionen av ett vektorrum $\mathcal{W}$ är antalet vektorer i någon (och vilket man kan visa, därmed varje) bas.

Koordinater

Om $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ är en bas i $\mathcal{W}$ och $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m$ så är $\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}$ koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$.

Basbyte

Antag att $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ och $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ är baser för $\mathcal{W}$ så att

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix} A$$

Om $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_m\end{bmatrix}^T$ är koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ och om $\begin{bmatrix}\beta_1 & \ldots & \beta_m\end{bmatrix}^T$ är koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ så är

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \ldots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$$

Ett exempel på basbyte

Fråga: Vad för slags yta (om alls någon) beskriver ekvationen $8xy + 6yz = 1$*?*

Ledning: Välj som nya basvektorer vektorerna $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ *och* $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Standardbasvektorerna är förstås $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *och*

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *så att* $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

forts.

Om nu $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *är koordinaterna för en punkt (eller vektor) i* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *basen*

och $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ *är koordinaterna i den nya basen* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *så gäller*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Om vi nu sätter in dessa uttryck i ekvationen så får vi efter diverse räkningar (som är onödiga om man vet hur $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *och* $\mathbf{u}_3$ *valts)*

$$1 = 8xy + 6yz = 5y'^2 - 5z'^2,$$

vilket visar att det är frågan om en hyperbolisk cylinder.

Egenvärden

Ifall $AX = \lambda X$ och $X \neq \mathbf{0}$ så är λ ett egenvärde till A och X är en egenvektor.

Karakteristiska polynom

Om A är en $m \times m$-matris så är

- $\det(A - \lambda I)$ *är A:s karakteristiska polynom*
- λ *ett egenvärde till A* $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Linjärt oberoende egenvektorer

Om matrisen A har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ och $\lambda_i \neq \lambda_j$ då $i \neq j$ så är det motsvarande egenvektorerna $X_1, X_2, \ldots X_m$ linjärt oberoende.

Egenvärden till symmetriska matriser

Egenvärden till en symmetrisk (och reell) matris är reella och egenvektorer (som hör till olika egenvärden) är ortogonala mot varandra.

Diagonalisering

Om A är en $n \times n$-matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och egenvektorer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ och om matrisen V, där $V(:,j) = X_j$, är inverterbar dvs., egenvektorerna är linjärt oberoende så är

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$A^k = V \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1}$$

Similära matriser

Om A är en $m \times m$-matris och S är en inverterbar $m \times m$-matris så har matriserna

$$A \quad \text{och} \quad S^{-1}AS \quad \text{samma egenvärden.}$$

Matriserna A och $S^{-1}AS$ sägs vara similära.

Egenvärden för triangulära matriser

Om A är en över- eller undertriangulär kvadratisk matris (isynnerhet en diagonal matris) så är A:s egenvärden elementen på diagonalen i A.

Egenvärden och determinanten

Om A är en $m \times m$-matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ så gäller

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_m.$$

Ett exempel på basbyte, egenvärden och egenvektorer

Fråga: Vad för slags yta (om alls någon) beskriver ekvationen $8xy + 6yz = 1$*?*

Uttrycket $8xy + 6yz$ *kan skrivas i formen* $X^{\mathsf{T}}AX$ *där* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *och*

$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. *Den här matrisen har egenvärdena* 0, 5 *och* -5 *med*

motsvarande egenvektorer $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ *och*

$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Här har egenvektorerna valts så att de alla har längden* 1 *och eftersom matrisen A är symmetrisk är de vinkelräta mot varandra. Detta innebär att om vi bildar matrisen U med vektorerna $\mathbf{u}_j$ som kolumnvektorer så är U ortogonal, dvs. $U^{\mathsf{T}} = U^{-1}$.*

forts.

Detta betyder i sin tur att $U^{\mathsf{T}}AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *så att om vi väljer nya koordinater så att* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = UX'$ *då blir*

$$8xy+6yz = X^{\mathsf{T}}AX = (X')^{\mathsf{T}}U^{\mathsf{T}}AUX' = (X')^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} X' = 5y'^2 - 5z'^2.$$

Observera att vi inte behöver räkna ut egenvektorerna för att se att ekvationen i det nya koordinatsystemet är $5y'^2 - 5z'^2 = 1$, *men för att veta i vilken riktning de nya koordinataxlarna går behövs de nog.*