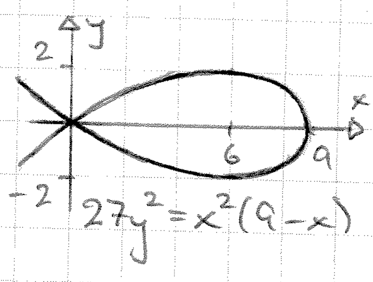
Gk 1 i Matematik, hemtal v48/07 Metsalo

Torsdagen 29.11. har vi 3:e datorövningen, då vi åter använder programpaketet Mathematica. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

Ov: 1a) 5.5.9/7/7 b) 5.5.10/8/8 c) 5.5.19/17/17
d) 5.5.20/18/18 e) 5.6.9/7/7 f) 5.6.14/12/12
g) 5.6.17/15/15 h) 5.6.27/23/23 (Uppl. 4/5/6)

2) Kurvan $27y^2 = x^2(9-x)$ bildar en ögla som i figuren t.h.



a) Ansätt att $y = y(x)$ och bestäm punkterna där kurvan har horisontell tangent mha. implicit derivering.

b) Ansätt att $x = x(y)$ och bestäm punkterna där kurvan har vertikal tangent mha. implicit derivering.

c) Bestäm tangentlinjens lutning i origo (där kurvan skär sig själv) mha. explicit derivering.

d) Beräkna arean innanför öglan.

Beräkna följande anti-derivator (obestämda integraler):

3a) $\int x \cdot \sin(3x^2)dx$ b) $\int x \cdot \sin(3x)dx$

c) $\int (e^{2x}/(1+e^{2x}))dx$ d) $\int (e^x/(1+e^{2x}))dx$

4a) $\int (\sin x)^{-1} dx = \int \csc x \, dx$

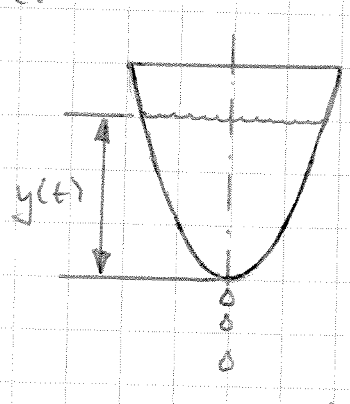
b) $\int \sin^{-1} x \, dx = \int \arcsin x \, dx$

c) $\int \sin^3 x \, dx = \int (\sin x)^3 dx$

d) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x)^2 \cdot (\cos x)^4 dx$

Märk bristen på logik vid jämförelse av beteckningarna i a), b) resp. c), d). Tyvärr är dessa ologiska beteckningar standard.

Demo: Klepshydran (vattenuret):
Torricellis lag säger att då en vätska läcker ut genom bottnet på ett kärl, sker det så att $dV/dt = -k \cdot \sqrt{y(t)}$, där y är vätskedjupet. Vi konstruerar en rotationssymmetrisk skål, där vätskedjupet sjunker med konstant hastighet.



v.g. vänd

Fr: 1a) 6.1.31 b) 6.1.32 (alla 3 upplagorna)

2a) Beräkna $\int dx/\sqrt{x^2+5}$ mha. Eulers substitution $t = x + \sqrt{x^2+5}$.

b) Beräkna $\int dx/\sqrt{x^2+5}$ mha. den trigonometriska substitutionen $x = \sqrt{5}\cdot\tan\theta$.

3a) Beräkna följande anti-derivator (obest. integraler):

i) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^3+8}$ ii) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{(x^2+1)^2}\,dx$

(Kontrollera gärna svaren mha. t.ex. Mathematica)

b) Undersök huruvida den generaliserade integralen konvergerar eller divergerar samt bestäm dess värde i händelse av konvergens:

i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3+8}$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$

4) Om $f(x) = e^{\sin x}$, så är $|f(x)| \le e$, $|f'(x)| \le 1.5$, $|f''(x)| \le e$, $|f'''(x)| \le 4.5$ och $|f^{(4)}(x)| \le 4e$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Beräkna en approximation av integralen $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx$ mha. trapetsmetoden. Dela upp integrationsintervallet i fyra lika stora delintervall ($n = 4$). Beräkna också en övre gräns för diskretionsfelet mha. olikheterna ovan.

b) Dito mha. Simpsons metod. (Nu är $2n = 4$)

Demo: Demo-uppgiften förra fredagen gav att $e \approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n! + 2/(n+1)!$ med ett fel $< 1/(n+1)!$ till absolutbeloppet, så vi kan approximera talet e med rationella tal med godtyckligt litet fel.

Nu skall vi approximera talet π med rationella tal med godtyckligt litet fel:

$\int_0^1 dx/(1+x^2) = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4$ så $\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$. Vi approximerar talet $\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ genom att använda Simpsons metod och $2n$ delintervall. Vi bestämmer också en övre gräns för felet i approximationen.

I kap. 9 får vi redskap för att visa, att även $\pi \notin \mathbb{Q}$