Gk1 i Matematik, hemtal v45/07 Metsalo

Torsdagen 8.11. har vi 2:a datorövningen, då vi använder programpaketet Mathematica. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

Ov: 1) Vi studerar ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a, b > 0)$.

a) Bestäm ekvationen för ellipsens tangentlinje i punkten $(x, y) = (5a/13, -12b/13)$ dels mha. implicit derivering, dels genom att lösa ut $y = y(x)$ explicit och sedan derivera.

b) Beräkna även 2:a derivatan $y''(x)$ dels mha. implicit derivering, dels mha. explicit derivering.

2) Kurvan $C: (x^2 + y^2)^2 = 14(x^2 - y^2) + 96xy + 175$ går genom punkterna $(2, -1)$ och $(2, 5)$. Bestäm kurvans lutning i dessa två punkter.

3) En boll släppes med från ett 80m högt torn. 3s senare kastas en annan boll efter den första. Med vilken begynnelsehastighet måste den andra bollen kastas för att bollarna skall träffa marken samtidigt? Bortse från luftmotståndet och använd $g = 10\,m/s^2$ för enkelhets skull.

4) Investmentbolaget Bluff & Båg utlovar exponentiell tillväxt på sina kunders pengar med en fördubbling av kapitalet på 3år. En kund investerar 1.500€ hos B&B.

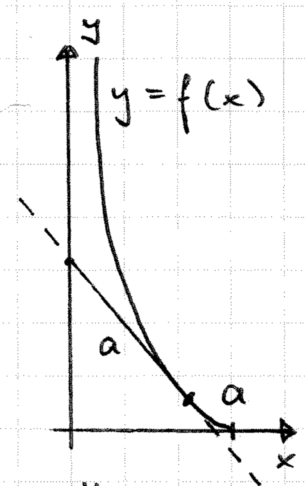
a) Hur stort är kundens kapital efter 2år (exakta svaret och svaret avrundat till hela €)?

b) Hur länge dröjer det innan kapitalet ökat till 4.000€ (exakta svaret och svaret avrundat till hela månader)?

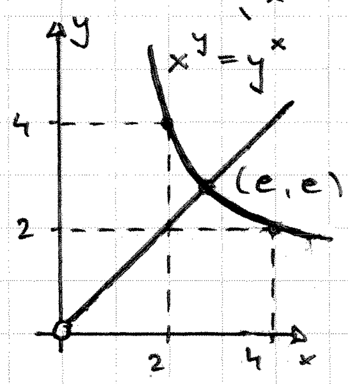
Demo: Vi visar att arctan inte är en rationell funktion, trots att dess derivata är en rationell funktion. Derivatan av en rationell funktion är alltid en rationell funktion, men antiderivatan av en rationell funktion behöver alltså inte vara en rationell funktion!

Fredagens hemtal finns på baksidan. På insidan beskrivs vad vi kommer att ägna den sista delen av kursen åt.

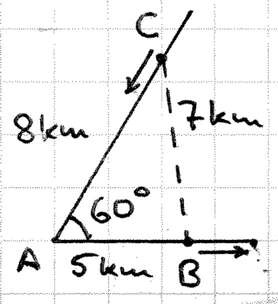
Fr. 1) Kurvan $y=f(x)=a\cdot\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}$, $0<x\le a$, kallas för en <u>traktris</u>, men är mera känd under namnet hundkurvan. Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som är mellan tangeringspunkten och y-axeln alltid har längden a.



2) Kurvan $x^y=y^x$, $x,y>0$ består av två grenar, nämligen linjen $x=y$ och en gren, som bl.a. går genom punkterna $(2,4)$, $(4,2)$ och (e,e). Bestäm kurvans lutning i punkten $(4,2)$.



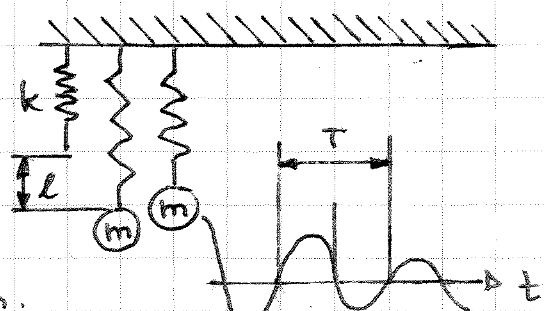
3) Från staden A utgår två vägar, som bildar vinkeln 60°. På den ena vägen finns en bil B, på avståndet 5km från staden, som åker bort från staden med hastigheten 55km/h. På den andra vägen finns en cyklist C, på avståndet 8km från staden. Hur fort skall cyklisten åka in mot staden för att avståndet till bilisten inte skall ändras i det aktuella ögonblicket?



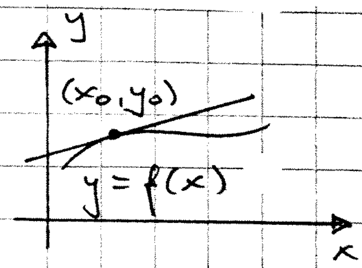
4) Calvin håller på att fylla en sfärisk ballong med vatten så att vattenvolymens ökningshastighet är konstant f (enh. dm^3/min).

Hur fort ökar ballongens area (enh. dm^2/min) och radie (enh. dm/min) i det ögonblicket, då ballongens area är A_0 (enhet dm^2)? Ge svaren uttryckta i f och/eller A_0.

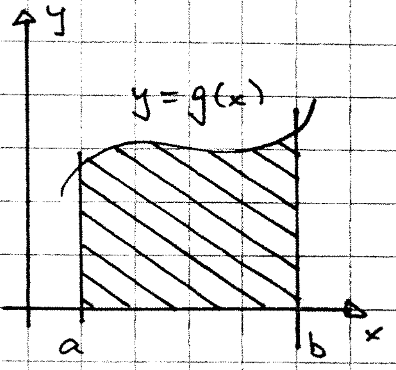
Demo: Vi studerar den dämpade harmoniska oscillatorn till höger och bestämmer fjäderkonstanten och dämpningen mha. enkla mätningar.



I kap. 2 studerade vi ett klassiskt problem, nämligen att bestämma <u>tangentlinjen</u> till en kurva $y = f(x)$ i en punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$. För detta infördes begreppet derivata.



I kap. 5 studerar vi ett till synes helt obesläktat problem, nämligen att bestämma <u>arean</u> hos ett plant område som i figuren till höger. För detta inför vi begreppet Riemann-summa och får att problemet är nära besläktat med derivering: vi behöver anti-derivatan till g för att kunna beräkna arean.



I kap. 6 får vi en del metoder med vilkas hjälp vi kan bestämma anti-derivatan till somliga funktioner. Vi utvidgar det i kap. 5 införda integralbegreppet (generaliserade integraler, kap. 6.5) och studerar en del numeriska metoder att approximera värdet av en bestämd integral, då vi inte kan finna integrandens anti-derivata.

I kap. 7 får vi en del andra tillämpningar av den bestämda integralen vid sidan av beräkning av arean hos plana områden. Det är dessa tillämpningar, som motiverar införandet av Riemann-summor.

Här bredvid finns en sammanfattning av diverse minnesregler för att härleda integraler i flera olika typer av tillämpningar. Dessa minnesregler är i allmänhet vida lättare att minnas än de färdiga integralerna!

Sammanfattning av formlerna för integralens tillämpningar

Area: $\Delta A \approx h \cdot \Delta b$, $\Delta A \approx b \cdot \Delta h$

(i pol. koord: $\Delta A \approx \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta$)

Volym:

Tvärsnittsmetoden: $\Delta V \approx A \cdot \Delta b$

Specialfall: rot. symm. kropp

$\Delta V \approx A \cdot \Delta b = \pi (r_2^2 - r_1^2) \cdot \Delta b$

Cylindriska skal (end. för rot. symm. kropp)

$\Delta V \approx 2\pi r \cdot h \cdot \Delta r$

Båglängd: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$

(i $\mathbb{R}^3$: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2 + (\Delta z/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$)

Area hos rot. symm yta:

$\Delta A \approx 2\pi r \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan.

(Tröghetsmoment map. en axel a:

$\Delta J_a \approx \Delta m \cdot r_a^2$, där r_a är avst. till axeln.)

Massa och tyngdpunkt hos en tråd med variabel dens:

$\Delta m \approx \rho \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan

$x_T = \frac{1}{m} \cdot \int x\,dm$, $y_T = \frac{1}{m} \cdot \int y\,dm$, $z_T = \frac{1}{m} \cdot \int z\,dm$

Tyngdpunkten hos en plan homogen skiva:

ΔA från area ovan

$x_T = \frac{1}{A} \cdot \int x\,dA$, $y_T = \frac{1}{A} \cdot \int y\,dA$

(här måste ΔA ha konstant x resp. y, men en tunn homogen strimla har sin tyngdpunkt i mitten)

Arbete: $\Delta W \approx F \cdot \Delta s$, $\Delta W \approx \Delta F \cdot s$

Vätsketryck: $P = \rho \cdot g \cdot d$ (dens. · grav. · djup)

Kraft: $\Delta F \approx P \cdot \Delta A \approx \rho g d \cdot \Delta A$

Motsv. integral fås sedan som gränsvärdet av en summa, som i allmänhet kommer att vara en Riemann-summa.