Gk1 i Matematik, hemtal v41/07 Metsalo

Deltentamen 1 äger rum tisdagen 16.10. kl. 16-19. Sal kommer att anslås i huvudaulan och utanför tentamenssalarna senast en timme i förväg. Deltentamen 1 omfattar de algebraiska grundbegreppen, induktion, komplexa tal samt kap. 1-5 i Lay.

http://math.tkk.fi/opetus/misc/tenttiobjekt.html.se innehåller information om reglerna för tentamina. Till deltentamina får vanliga funktionsräknare medtagas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte medtagas. Tentanden måste kunna legitimera sig. På kursens hemsida finns en länk med tidigare mellanförhör och tentamina.

Torsdagen 18.10 har vi 1:a datorövningen, då vi använder programpaketet Matlab. Uppgifterna delas ut separat.

Efter mellanförhöret börjar vi med Adams.

Öv: 1) Begreppen jämna och udda funktioner definieras i kap. P4 i Adams.

a) Antag att f är en funktion, vars definitionsmängd är origosymmetrisk, dvs. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. Då är $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(f(x)+f(-x)) + \frac{1}{2}\cdot(f(x)-f(-x))$. Visa att $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(f(x)+f(-x))$ är en jämn funktion, dvs. att $g(-x) = g(x)$ och att $h(x) = \frac{1}{2}\cdot(f(x)-f(-x))$ är en udda funktion, dvs. att $h(-x) = -h(x)$.
Visa också att detta är enda sättet att skriva f som en summa av en jämn och en udda funktion.

b) Visa att mängden av jämna funktioner med definitionsmängden $\mathbb{R}$ bildar ett underrum i vektorrummet bestående av funktioner med def.mängden $\mathbb{R}$ (med operationerna addition av vektorer (som i detta vektorrum alltså är funktioner) samt multiplikation av vektor med skalär). (Motsvarande gäller också för de udda funktionerna med def. mängden $\mathbb{R}$ och beviset är helt analogt.)

V.g. vänd

2a) 4.1.32 i Lay

b) 4.1.33 i Lay

3a) 4.5.22 i Lay

b) Skriv $p(t) = 1 + t + t^2/2 + t^3/6$ som en linjär kombination av $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = 1 - t$, $L_2(t) = 2 - 4t + t^2$ och $L_3(t) = 6 - 18t + 9t^2 - t^3$, dvs. på formen $p = c_0L_0 + c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3$. Sätt upp motsvarande linjära ekvationssystem för $c_0, \dots, c_3$ (koordinaterna för denna bas) och lös det genom att först beräkna inversmatrisen till motsvarande koefficientmatris.

4) En kvadratisk matris A är som bekant (fr v39) symmetrisk, om $A^T = A$. Visa att de tre reella symmetriska 2×2-matriserna

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

bildar en bas för vektorrummet bestående av reella 2×2-matriser.

Demo: Låt A vara en $n\times n$-matris med egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Vi visar att

a) A^T också har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

b) $\det(A) = |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

c) $A^{-1} \exists \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0$

d) Om $A^{-1} \exists$, är dess egenvärden $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$.

Fr: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a) För ett visst värde på α är $\bar{x}$ en egenvektor till A. Bestäm detta α-värde samt egenvärdet λ, till vilket $\bar{x}$ i så fall hör.

b) A och A^T har samma egenvärden. Bestäm en egenvektor till A^T, som hör till λ i a)-delen.

2) $A = \begin{pmatrix} -15 & 24 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a) Beräkna $\det(A) = |A|$

b) Beräkna $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$

d) Bestäm A:s karaktäristiska polynom $p_A(\lambda)$

e) Bestäm A:s egenvärden

f) Bestäm egenvektorerna till resp. egenvärde.

3a) Låt A vara en idempotent matris, så $A^2 = A$ (se uppg. 3, fr v40). Visa att A endast kan ha egenvärdena 0 och 1.

b) Parallellprojektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\hat{n}^T \bar{s}} \cdot \bar{s}\hat{n}^T$ (se även manipulation 4 i supplementet) har (minst) ett egenvärde $= 0$, eftersom $\det(P) = 0$. Visa att också 1 är ett egenvärde till P.

4a) Låt B vara en godtycklig $n \times n$-matris. Visa att om λ är ett egenvärde till B, så är λ^2 ett egenvärde till B^2.

b) Visa att i så fall är λ^k ett egenvärde till B^k för $k = 1, 2, 3, \ldots$

c) Visa att om B dessutom är inverterbar, så är λ^k ett egenvärde till B^k också för $k = -1, -2, -3, \ldots$
(Om vi för inverterbart B definierar $B^0 \overset{def}{=} I_n$, har vi att λ^m är ett egenvärde för B^m, $\forall m \in \mathbb{Z}$.)

Demo-tiden används åt besvarande av frågor inför mellanförhöret.

Räkneövningen nästa onsdag är en demo-övning. Då framgår också den djupa sanningen i Garfields påstående nedan: