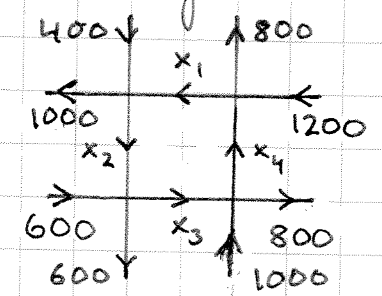
Gk1 i Matematik, hemtal v39/07 Metsalo

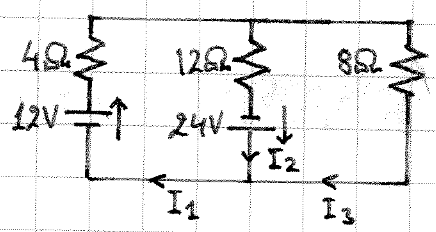
På insidan av detta blad används <u>Gauss-Jordans metod</u> för att lösa ett linjärt ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta samt för att invertera en kvadratisk matris.

Ov: 1) Uppgift 1.6.8 i Lay. Sätt upp det linjära ekvationssystemet och förklara införda storheter. Lös det därefter mha. Gauss' elimination och bakåtsubstitution. Lösningen är (naturligtvis) inte unik. Välj den till absolutbeloppet minsta icke-triviala lösningen.

2) Trafikflödet (i antalet bilar per timme) längs fyra enkelriktade gator ges av figuren till höger. Bestäm flödena x_1, x_2, x_3 och x_4.



3) Använd Kirchhoffs lag för att bestämma strömmarna I_1, I_2 och I_3 (i Ampere $A = V/\Omega$) i kretsen till höger.



4a) Lös Sam Loyds Mother's Jam Puzzle på insidan av supplementet.

b) Lös Sam Loyds Puzzling Scales. (I 3:e figuren balanserar 2 kannor och 3 tallrikar.)

Demo:
$$\begin{cases} x + y + z = -5 \\ -x + 2y - 7z = 11 \\ 3x + 2y + \alpha z = -17 \\ x + 2y - z = \beta \end{cases}$$

Vi bestämmer lösningarna till det linjära ekvationssystemet för olika värden på parametrarna α & β.

Fredagens hemtal på baksidan.

Fr: 1) En matris A sådan att $A^T = A$ kallas <u>symmetrisk</u> och en matris $B \ni B^T = -B$ kallas <u>anti-symmetrisk</u>.

a) Förklara varför endast kvadratiska matriser kan vara symmetriska eller anti-symmetriska.

b) Visa att om C är en godtycklig $m \times n$-matris, så är CC^T och C^TC bägge symmetriska.

c) Visa att om A är en kvadratisk matris, så är $\frac{1}{2}\cdot(A+A^T)$ symmetrisk och $\frac{1}{2}(A-A^T)$ anti-symmetrisk.

d) A $n\times n$ $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$. Visa att detta är enda sättet att skriva A som summan av en symmetrisk och en anti-symmetrisk matris.

2) Visa att speglingsmatrisen $H = I - 2\hat{n}\hat{n}^T$ i manipulation 3 i supplementet satisfierar

a) $H^T = H$ b) $H^2 = H\cdot H = I$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Visa att ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ saknar lösning

b) Lös ekv. systemet $A^TA\bar{x} = A^Tb$.

Sensmoral: $A\bar{x} = \bar{b} \not\Leftarrow A^TA\bar{x} = A^T\bar{b}$.

4) Vi studerar höger- och vänsterinverser till matriser, som inte nödvändigtvis är kvadratiska.

a) Finn någon matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Visa att det inte finns någon matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demo: Låt A vara en godtycklig $m\times n$-matris.

a) Vi visar att om $I + A^TA$ är inverterbar så är $I - A(I+A^TA)^{-1}A^T$ inversmatrisen till $I + AA^T$, så i så fall är även $I + AA^T$ inverterbar.

b) Vi visar analogt, att om $I + AA^T$ är inverterbar, så är även $I + A^TA$ inverterbar.

c) Vi visar att $I + A^TA$ (och därmed även $I + AA^T$) är inverterbar för varje $m\times n$-matris A.

Lösning av linjärt ekvationssystem med 4 ekvationer och 4 obekanta mha <u>Gauss-Jordans metod</u>:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} \text{nya rad } 1 = \frac{1}{2} \cdot \text{rad } 1 \\ nr2 = r2 - (-4) \cdot nr1 \\ nr3 = r3 - 1 \cdot nr1 \\ nr4 = r4 - 1 \cdot nr1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} nr2 = r3 \\ nr3 = r2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \begin{cases} nr2 = \frac{1}{-1/2} \cdot r2 \\ nr1 = r1 - \frac{1}{2} \cdot nr2 \\ nr3 = r3 - 0 \cdot nr2 \\ nr4 = r4 - \frac{1}{2} \cdot nr2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} nr3 = \frac{1}{-1} \cdot r3 \\ nr1 = r1 - (-2) \cdot nr3 \\ nr2 = r2 - 2 \cdot nr3 \\ nr4 = r4 - 0 \cdot nr3 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} nr4 = \frac{1}{-3} \cdot r4 \\ nr1 = r1 - (-6) \cdot nr4 \\ nr2 = r2 - 7 \cdot nr4 \\ nr3 = r3 - (-3) \cdot nr4 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Det linjära ekvationssystemet visar sig ha en unik lösning. Lösningen bör kontrolleras genom insättning i det ursprungliga ekvationssystemet.

Invertering av en 4×4-matris mha Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A \quad \text{skall inverteras.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nya rad } 1 = \frac{1}{2} \cdot \text{rad } 1 \\ nr2 = r2 - (-4) \cdot nr1 \\ nr3 = r3 - 1 \cdot nr1 \\ nr4 = r4 - 1 \cdot nr1 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = r3 \\ nr3 = r2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = \frac{1}{-1/2} \cdot r2 \\ nr1 = r1 - \frac{1}{2} \cdot nr2 \\ nr3 = r3 - 0 \cdot nr2 \\ nr4 = r4 - \frac{1}{2} \cdot nr2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr3 = \frac{1}{-1} \cdot r3 \\ nr1 = r1 - (-2) \cdot nr3 \\ nr2 = r2 - 2 \cdot nr3 \\ nr4 = r4 - 0 \cdot nr3 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr4 = \frac{1}{-3} \cdot r4 \\ nr1 = r1 - (-6) \cdot nr4 \\ nr2 = r2 - 7 \cdot nr4 \\ nr3 = r3 - (-3) \cdot nr4 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$